

**Störungstheorie für kommutative m -Tupel
von selbstadjungierten Operatoren**

Jürgen Voigt

1975

Störungstheorie für

kommutative m -Tupel von selbstadjungierten Operatoren

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik der
Ludwig - Maximilians - Universität München



vorgelegt von
Jürgen Voigt

am 18. Dezember 1974



1. Berichterstatter: Professor Dr. Joachim Weidmann

2. Berichterstatter: Professor Dr. Ernst Wienholtz

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Februar 1975

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
<u>0. Bezeichnungen, Grundbegriffe, Hilfsmittel</u>	
§ 1 Bezeichnungen, Grundbegriffe	8
§ 2 Spektraldarstellung kommutativer Familien selbstadjungierter Operatoren	12
<u>I. Verallgemeinerungen des Satzes von Weyl - von Neumann</u>	
§ 3 Endlich viele Operatoren	31
§ 4 Abzählbar viele Operatoren	36
§ 5 Operatoren mit rein singulärem Spektrum	40
§ 6 Bemerkungen und Beispiele zu §3 und §5	47
<u>II. Stabilität von absolut stetigen Spektren</u>	
§ 7 Wellenoperatoren für unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}^m$	55
§ 8 Unitäre Äquivalenz der absolut stetigen Teile von Operatoren - m - Tupeln, $m \geq 3$	61
§ 9 Ergebnisse für normale Operatoren ($m = 2$)	75
§ 10 Bemerkungen und Vergleich mit bekannten Resultaten	82
§ 11 Ein Beispiel	85
<u>III. Instabilität singulärer Spektren</u>	
§ 12 Nichtexistenz von Wellenoperatoren, Bemerkungen und Beispiele zu §5	93
Literaturverzeichnis	101

Einleitung

Diese Arbeit behandelt Fragestellungen, die aus der Verallgemeinerung des Satzes von Weyl - von Neumann auf normale Operatoren hervorgegangen sind.

Zunächst wollen wir die Ausgangssituation der Arbeit beschreiben.

Sei T ein selbstadjungierter Operator in einem separablen Hilbertraum H . J. von Neumann [25] zeigte 1935, daß man einen selbstadjungierten Operator K mit beliebig kleiner Hilbert - Schmidt - Norm finden kann, so daß $T+K$ diagonal ist (Satz von Weyl - von Neumann, vgl. Bemerkung 3.2; zur Definition von "diagonal" vgl. §1,b). Im Jahre 1957 wurde von M. Rosenblum [29] für einen Spezialfall und von T. Kato [20] allgemein gezeigt, daß der absolut stetige Teil von $T+K$ dem von T unitär äquivalent ist, falls K in der Spurklasse liegt (Satz von Kato - Rosenblum, vgl. Satz 10.1). Daraufhin zeigte S. T. Kuroda [22] im Jahr 1958 durch eine Verschärfung des Satzes von Weyl - von Neumann, daß das Resultat von Kato - Rosenblum in gewisser Weise optimal ist (vgl. Bemerkung 3.2). Die im Jahr 1970 von S. K. Berberian [3] gestellte Frage, ob ein "Satz von Weyl - von Neumann für normale Operatoren" möglich ist, wurde recht bald unabhängig von I. D. Berg [4] und W. Sikonja [30] positiv beantwortet. I. D. Berg [5] und J. Weidmann [33] bewiesen weiterhin, daß die Störung, von der man in den vorherigen Resultaten nur Kompaktheit voraussetzen durfte, auch aus kleineren Klassen kompakter Operatoren, die sämtlich die Hilbert - Schmidt - Operatoren echt enthalten, gewählt werden kann; dabei kann man in gewissem Sinn beliebig nahe an die Hilbert - Schmidt - Operatoren herankommen, jedoch ohne diese zu erreichen (vgl. Satz 3.1).

Aus dem Problem zu zeigen, daß hier im allgemeinen tatsächlich nicht Hilbert - Schmidt - Operatoren gewählt werden können, ist diese Arbeit entstanden.

Die bekannte Tatsache, daß man statt eines normalen Operators ebensogut zwei vertauschbare selbstadjungierte Operatoren behandeln kann, führte den Autor zunächst zu Verallgemeinerungen des Satzes von Weyl - von Neumann auf m -Tupel von vertauschbaren selbstadjungierten Operatoren. Diese Betrachtungsweise führte dann dazu, unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}^m$ zu betrachten und für diese die Methode der Wellenoperatoren - die im Beweis des oben erwähnten Satzes von Kato - Rosenblum zum Erfolg führt - einzuführen. Mit dieser Methode erhält man tatsächlich befriedigende Ergebnisse, allerdings nur im Fall $m \geq 3$; im Fall $m = 2$ versagen die entsprechenden Abschätzungen. Daher bleibt das anfangs gestellte Problem offen. Weiterhin werden entsprechende, das singuläre Spektrum eines Operators betreffende Fragestellungen behandelt.

In §1 werden Bezeichnungen eingeführt und einige grundlegende Tatsachen über die später verwendeten Klassen c_p von kompakten Operatoren erwähnt.

In §2 wird der Spektraldarstellungssatz in einer später benötigten Fassung formuliert und bewiesen.

§3 bringt die oben erwähnte Verallgemeinerung des Satzes von Weyl - von Neumann. Dabei zeigt sich, daß man aus einem m -Tupel $(T_1, \dots, T_m)$ von vertauschbaren selbstadjungierten Operatoren durch Addition von kompakten Operatoren ein diagonales m -Tupel machen kann. Die kompakten Operatoren können hier aus c_p , $p > m$, gewählt werden, was damit zusammenhängt, daß man $\mathbb{R}^m$ immer als eine das gemeinsame Spektralmaß von $(T_1, \dots, T_m)$ tragende Menge wählen kann.

In §4 zeigen wir ein entsprechendes Ergebnis für abzählbare Familien von Operatoren.

Der in §3 sichtbare Zusammenhang zwischen der Dimension m von $\mathbb{R}^m$ und den Klassen c_p , $p > m$, wird in §5 in entsprechender Weise für das singuläre Spektrum eines einzigen Operators nachgewiesen.

§6 enthält Bemerkungen und Beispiele, die diese Analogie

auch für mehrere Operatoren mit singulärem gemeinsamen Spektrum nahelegen.

In §7 behandeln wir die oben erwähnte Methode der Wellenoperatoren für unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}^m$ abstrakt.

Mit der in §7 dargestellten Methode wird in §8 für $m \geq 3$ gezeigt, daß die absolut stetigen Teile von kommutativen m -Tupeln $(T_1, \dots, T_m)$ und $(T'_1, \dots, T'_m)$ unitär äquivalent sind, falls alle Störungen $T'_j - T_j$, $j = 1, \dots, m$, in c_p liegen für ein $p < m$. Daraus folgt insbesondere, daß die Ergebnisse von §3 bezüglich der Wahl der kompakten Störung nicht wesentlich verbessert werden können.

§9 bringt Ergebnisse für normale Operatoren (d.h. $m = 2$), die leider weniger befriedigend sind als die für die Fälle $m \geq 3$.

Nach Bemerkungen und dem Vergleich der Resultate mit den für den Fall $m = 1$ bekannten in §10 geben wir in §11 ein Beispiel, das die Betrachtungen von §8 erläutert und zeigt, daß die Situation von §8 überhaupt nichttrivial realisiert werden kann.

In §12 wird gezeigt, daß die Methode der Wellenoperatoren für das singuläre Spektrum eines selbstadjungierten Operators nicht zu Ergebnissen führt. Dabei wird auch dargelegt, daß das singuläre Spektrum leichter gestört wird als das absolut stetige.

Für die Anregung zu dieser Arbeit, stetes Interesse und viele Diskussionen danke ich Herrn Prof. Dr. Joachim Weidmann. Weiterhin danke ich allen, die mir die Anfertigung dieser Dissertation ermöglicht haben, insbesondere meinem unerwartet verstorbenen Lehrer, Herrn Prof. Dr. Konrad Jörgens.

0. Bezeichnungen, Grundbegriffe, Hilfsmittel

§ 1 Bezeichnungen, Grundbegriffe

a) Allgemeines

Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen; $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$. Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen, mit $\mathbb{C}$ die der komplexen Zahlen, mit c^* die zu $c \in \mathbb{C}$ konjugiert komplexe Zahl.

Für $m \in \mathbb{N}$ sei mit λ^m das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathbb{R}^m$ bezeichnet; jedoch werden wir $\int \dots(x) dx$ (oder entsprechend) statt $d\lambda^m$ schreiben.

b) Hilbertraum, lineare Operatoren

Wir werden nur Hilberträume über dem Skalkörper $\mathbb{C}$ betrachten. In den Bezeichnungen halten wir uns an Jörgens [19]; insbesondere ist das Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ im ersten Argument antilinear, im zweiten linear.

Sind A eine Indexmenge, $(H_\alpha; \alpha \in A)$ und $(H'_\alpha; \alpha \in A)$ Familien von Hilberträumen, T_α ein linearer Operator von H_α in H'_α ($\alpha \in A$), so ist der lineare Operator $T := \bigoplus (T_\alpha; \alpha \in A)$ von $H := \bigoplus (H_\alpha; \alpha \in A)$ in

$H' := \bigoplus (H'_\alpha; \alpha \in A)$ erklärt durch

$D(T) := \{x = (x_\alpha) \in H; x_\alpha \in D(T_\alpha) (\alpha \in A), \sum (\|T_\alpha x_\alpha\|^2; \alpha \in A) < \infty\}$,

$Tx := (T_\alpha x_\alpha)$ für $x \in D(T)$; T heißt orthogonale Summe der Familie $(T_\alpha; \alpha \in A)$; es gilt

$\|T\| = \sup \{\|T_\alpha\|; \alpha \in A\}$.

Sei H ein Hilbertraum, T ein linearer Operator in H , H_1 ein abgeschlossener Teilraum von H , $H_2 := H_1^\perp$. Es gelte $T(H_j \cap D(T)) \subset H_j$ ($j=1,2$) (d.h. H_j ist invariant unter T); der Operator T_j in H_j sei definiert durch $D(T_j) := H_j \cap D(T)$, $T_j := T|_{D(T_j)}$ ($j=1,2$). Gilt dann $T = T_1 \oplus T_2$, so heißt H_1 reduzierender Teilraum von T , und $T_{H_1} := T_1$ bezeichnet den Teil von T in H_1 . H_1 ist genau dann reduzierender Teilraum von T , wenn für die Orthogonalprojektion P_1 auf H_1 gilt $P_1 T \subset T P_1$ (vgl. Kato [21], III-5.6 und V-3.9).

Ist H_1 reduzierender Teilraum von T , so auch von $\lambda I - T$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) und, falls T invertierbar, von T^{-1} .

Ist $(H_\alpha; \alpha \in A)$ eine Familie von abgeschlossenen Teilräumen von H , $H = \bigoplus (H_\alpha; \alpha \in A)$, und jeder Teilraum H_α ein reduzierender Teilraum von T , so gilt $T \subset \bigoplus (T_\alpha; \alpha \in A)$; ist T abgeschlossen, so ist $T = \bigoplus (T_\alpha; \alpha \in A)$.

Ist $T \in B(H)$, so reduziert ein abgeschlossener Teilraum H' von H den Operator T genau dann, wenn H' invariant unter T und T^* ist. Für eine Menge $\mathcal{K}$ von den Operator T reduzierenden abgeschlossenen Teilräumen ist daher der abgeschlossene Teilraum $\bigcap (H'; H' \in \mathcal{K})$ auch ein reduzierender Teilraum von T . Die letzte Aussage gilt ebenso für einen (nicht auf ganz H definierten) Operator T in H mit nichtleerer Resolventenmenge $\rho(T) \neq \emptyset$.

Ist Λ eine Indexmenge, $T = (T_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ eine Familie von Operatoren in H , H_1 ein abgeschlossener Teilraum von H , der alle T_λ ($\lambda \in \Lambda$) reduziert, so nennen wir H_1 einen reduzierenden Teilraum von T ; wir bezeichnen mit

$T_{H_1} := ((T_\lambda)_{H_1} ; \lambda \in \Lambda)$ den Teil von T in H_1 . Die oben für einen Operator angegebenen Aussagen über Reduktion gelten entsprechend für Familien von Operatoren.

Sei H ein Hilbertraum. Wir nennen zwei lineare Operatoren T_1 und T_2 vertauschbar, wenn für alle $z_1 \in \mathfrak{D}(T_1)$, $z_2 \in \mathfrak{D}(T_2)$ gilt $(z_1 - T_1)^{-1}(z_2 - T_2)^{-1} = (z_2 - T_2)^{-1}(z_1 - T_1)^{-1}$; dies ist genau dann der Fall, wenn es für je ein $z_1 \in \mathfrak{D}(T_1)$, $z_2 \in \mathfrak{D}(T_2)$ gilt; ist einer der Operatoren aus $B(H)$, so kann in der Definition statt der Resolvente dieses Operators der Operator selbst genommen werden; sind beide Operatoren aus $B(H)$, so bedeutet Vertauschbarkeit gerade $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

Eine Familie $(T_\lambda ; \lambda \in \Lambda)$ von Operatoren in H nennen wir kommutativ, wenn die Operatoren der Familie paarweise vertauschbar sind.

Eine Familie $(T_\lambda ; \lambda \in \Lambda)$ von Operatoren in H heißt diagonal oder gemeinsam diagonal, wenn alle T_λ normal (vgl. Kato [21], V-§3.8) sind und es eine Orthonormalbasis B von H gibt mit $B \subset D(T_\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$), so daß jedes Element $x \in B$ Eigenelement aller T_λ ($\lambda \in \Lambda$) ist; B heißt dann gemeinsame Eigenbasis von $(T_\lambda ; \lambda \in \Lambda)$. Ist $\xi_{x,\lambda}$ der Eigenwert von T_λ zum Eigenelement $x \in B$, so heißt $\xi_x := (\xi_{x,\lambda} ; \lambda \in \Lambda)$ gemeinsamer Eigenwert von $(T_\lambda ; \lambda \in \Lambda)$ (zum Eigenelement x).

Ist insbesondere $\Lambda = \{1\}$ einelementig, so nennen wir T_1 diagonal.

Seien H, H' Hilberträume, $T = (T_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ eine Familie von Operatoren in H , $T' = (T'_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ eine Familie von Operatoren in H' . T und T' heißen unitär äquivalent oder gemeinsam unitär äquivalent, wenn es eine unitäre Abbildung $J: H \rightarrow H'$ gibt, so daß gilt $T'_\lambda = JT_\lambda J^*$ ($\lambda \in \Lambda$); wir schreiben auch $T' = JTJ^*$ und sagen, J vermittele die unitäre Äquivalenz zwischen T und T' . Ist insbesondere $\Lambda = \{1\}$ einelementig, so nennen wir T_1 und T'_1 unitär äquivalent.

c) Klassen c_p kompakter Operatoren

Sei H ein Hilbertraum. Ist $K \in B(H)$ ein kompakter Operator, so bezeichnen wir mit $\mu_n(K)$ die Eigenwerte von $(K^*K)^{1/2}$ und definieren für $0 < p < \infty$

$$\|K\|_p := (\sum (\mu_n(K))^p; n \in \mathbb{N})^{1/p},$$

$\|K\|_\infty := \|K\| = \max\{\mu_n(K); n \in \mathbb{N}\}$. Für $0 < p \leq \infty$ bildet

$$c_p := c_p(H) := \{K \in B(H); K \text{ kompakt, } \|K\|_p < \infty\}$$

einen Vektorraum; c_1 ist die Spurklasse, c_2 der Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren.

Für $0 < p \leq p' \leq \infty$ gilt $\|K\|_{p'} \leq \|K\|_p$, $c_p \subset c_{p'}$.

Für $p \geq 1$ ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf c_p (vgl. McCarthy [24],

Theorem 2.4); für $0 < p \leq 1$ ist

$c_p \times c_p \ni (K_1, K_2) \mapsto \|K_1 - K_2\|_p^p$ eine Metrik auf c_p (vgl. McCarthy [24], Theorem 2.8).

Für $0 < p \leq \infty$ ist c_p vollständig (McCarthy [24], Corollary 3.2).

Sei $H = \bigoplus (H_j; j \in \mathbb{N})$, $K_j \in c_p(H_j)$ ($j \in \mathbb{N}$).

Für den Operator $K := \bigoplus (K_j; j \in \mathbb{N})$ ist dann

$$K^* = \bigoplus (K_j^*; j \in \mathbb{N}), \quad K^* K = \bigoplus (K_j^* K_j; j \in \mathbb{N}),$$

$$\|K\|_p^p = \sum (\|K_j\|_p^p; j \in \mathbb{N}) \quad \text{für } 0 < p < \infty.$$

Seien $(\varphi_j; j = 1, \dots, n)$ und $(\psi_j; j = 1, \dots, n)$ orthogonale Systeme in H , $K := \sum (\langle \psi_j | \cdot \rangle \varphi_j; j = 1, \dots, n)$.

Dann ist $K^* = \sum (\langle \varphi_j | \cdot \rangle \psi_j; j = 1, \dots, n)$,

$$K^* K = \sum (\|\psi_j\|^2 \langle \varphi_j | \cdot \rangle \varphi_j; j = 1, \dots, n)$$

$$= \sum (\|\psi_j\|^2 \|\varphi_j\|^2 \left\langle \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|} \middle| \cdot \right\rangle \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}; j = 1, \dots, n),$$

$$\|K\|_p^p = \sum (\|\psi_j\| \|\varphi_j\|)^p; j = 1, \dots, n) \quad \text{für } 0 < p < \infty.$$

§ 2 Spektraldarstellung kommutativer Familien selbstadjungierter Operatoren

Wir werden die Spektraldarstellung von kommutativen Familien selbstadjungierter Operatoren in einer Fassung aufschreiben, die wir später benötigen werden; außerdem werden wir Definitionen treffen, die sonst im allgemeinen nur für einen einzigen selbstadjungierten Operator üblich sind. Die Idee, für selbstadjungierte Operatoren statt der Existenz eines Spektralmaßes eine unitäre Äquivalenz zu Multiplikationsoperatoren auf einem Maßraum nachzuweisen, ist wohl ziemlich alt; eine sehr einleuchtende Diskussion dieses Vorgehens findet man bei Halmos [15]. Die Sätze dieses Paragraphen sind wohlbekannt - eine Ausnahme bildet möglicherweise Hilfssatz 2.8 - , jedoch haben wir keine Stelle in der Literatur gefunden, der wir ohne die Floskel "wie man völlig analog beweist" die Sätze hätten entnehmen können oder die wir ohne ausführliche Diskussion hätten zitieren können. Daher haben wir es vorgezogen, den Zugang in sich verständlich zu halten. Auf das genaue Ausführen einiger Standardbeweise werden wir verzichten.

2.1 Bezeichnungen, Bemerkungen.

Sei (S, Σ) ein Meßraum (vgl. Bauer [2], §7), $(\mu_\alpha; \alpha \in A)$ eine Familie von σ -endlichen auf Σ definierten Maßen (Bauer [2], 5.1). Sei $a: S \rightarrow \mathbb{C}$ Σ -meßbar.

Mit M_a bezeichnen wir den folgendermaßen definierten Multiplikationsoperator in $H := \bigoplus (L_2(S, \Sigma, \mu_\alpha); \alpha \in A)$:

$$D(M_a) := \{f = (f_\alpha) \in H; (af_\alpha) \in H\},$$

$$M_a f := (af_\alpha) \text{ für } f = (f_\alpha) \in D(M_a).$$

Folgende Eigenschaften sind bekannt und leicht zu zeigen:

- a) M_a ist ein normaler Operator in H ;
- b) es gilt $(M_a)^* = M_{a^*}$;
- c) M_a selbstadjungiert $\iff a$ reell μ_α -fast überall ($\alpha \in A$);
- d) $M_a \geq 0 \iff a \geq 0$ μ_α -fast überall ($\alpha \in A$);
- e) $M_a \in B(H) \iff \|a\|_\infty := \sup\{\mu_\alpha\text{-wes } \sup |a|; \alpha \in A\} < \infty$,
in diesem Fall gilt $\|M_a\| = \|a\|_\infty$;
- f) M_a invertierbar $\iff \mu_\alpha([a=0]) = 0$ ($\alpha \in A$),
in diesem Fall ist $(M_a)^{-1} = M_{(a^{-1})}$ ($a^{-1} := 0$ auf $[a=0]$).

2.2 Satz.

Sei H ein Hilbertraum, Γ ein kompakter Hausdorffraum, $j: C(\Gamma) \rightarrow B(H)$ ein $*$ -Algebrenhomomorphismus mit $j(1) = I$ (" $*$ " bedeutet $j(\varphi^*) = (j(\varphi))^*$ ($\varphi \in C(\Gamma)$)).

Dann existieren eine Familie $(\mu_\alpha; \alpha \in A)$ von Baire-Maßen auf Γ und eine unitäre Abbildung

$$J: \bigoplus (L_2(\Gamma, \mu_\alpha); \alpha \in A) \rightarrow H, \text{ so daß gilt}$$

$$j(\varphi) = J M_\varphi J^* \quad (\varphi \in C(\Gamma))$$

(M_φ der in Bemerkung 2.1 erklärte Multiplikationsoperator in $\bigoplus (L_2(\Gamma, \mu_\alpha); \alpha \in A)$), d.h. die Operatorfamilien

$(M_\varphi; \varphi \in C(\Gamma))$ und $(j(\varphi); \varphi \in C(\Gamma))$ sind unitär äquivalent.
Ist H separabel, so kann $A \subset \mathbb{N}$ gewählt werden.

2.3 Bemerkungen.

a) Ein Baire-Maß (Bauer [2], 43.3) auf einem kompakten Hausdorffraum ist nach Definition endlich (d.h. $\mu(\Gamma) < \infty$). Ist Γ ein lokalkompakter Hausdorffraum, der abzählbar im Unendlichen ist, so ist jedes Baire-Maß auf Γ regulär und σ -endlich (Bauer [2], 43.5); diese Eigenschaften wird Γ bei uns immer haben, daher werden alle Baire-Maße regulär und σ -endlich sein, was wir weiterhin nicht gesondert erwähnen werden. Ist Γ ein metrischer Raum, so stimmt die σ -Algebra der Baire-Mengen mit der σ -Algebra der Borel-Mengen überein (Bauer [2], 40.4); in diesem Fall werden wir ohne weitere Bemerkung die Bezeichnungen Borel-Maß und Borel-Menge verwenden statt Baire-Maß und Baire-Menge.

b) Aus den Voraussetzungen von Satz 2.2 folgt

$$\|j(\varphi)\| \leq \|\varphi\|_\infty \quad (\varphi \in C(\Gamma)) :$$

Für $\varphi \geq 0$ gilt $j(\varphi) = j(\varphi^{1/2})^* j(\varphi^{1/2}) \geq 0$;

für $\varphi \in C(\Gamma)$ ist daher

$$\|j(\varphi)x\|^2 = \langle x | j(|\varphi|^2)x \rangle \leq \langle x | \|\varphi\|_\infty^2 j(1)x \rangle = \|\varphi\|_\infty^2 \|x\|^2 \quad (x \in H).$$

2.4 Hilfssatz.

Die Voraussetzungen von Satz 2.2 seien erfüllt; weiterhin

sei $x \in H$, $H_x := \overline{\{j(\varphi)x; \varphi \in C(\Gamma)\}}$.

Dann existieren ein Baire-Maß μ_x auf Γ und eine unitäre Abbildung

$$J_x : L_2(\Gamma, \mu_x) \rightarrow H_x, \quad \text{so daß gilt}$$

$$j(\varphi) J_x = J_x M_\varphi \quad (\varphi \in C(\Gamma)).$$

Durch die zusätzliche Forderung $J_x 1 = x$ sind μ_x und

J_x eindeutig bestimmt; dann gilt $\mu_x(\Gamma) = \|x\|^2$.

Beweis. Falls μ_x existiert, hat $J_x 1 = x$ zur Folge

$$J_x \varphi = J_x M_\varphi 1 = j(\varphi) J_x 1 = j(\varphi)x,$$

$$\int \varphi d\mu_x = \langle 1 | \varphi \rangle_{L_2(\Gamma, \mu_x)} = \langle J_x 1 | J_x \varphi \rangle = \langle x | j(\varphi)x \rangle \quad (\varphi \in C(\Gamma)).$$

Aus den Voraussetzungen über j zusammen mit Bemerkung 2.3,b folgt aber, daß $C(\Gamma) \ni \varphi \mapsto \langle x | j(\varphi)x \rangle$ eine positive

Linearform auf $C(\Gamma)$ ist; daher existiert genau ein Baire -

Maß μ_x auf Γ mit $\langle x | j(\varphi)x \rangle = \int \varphi d\mu_x \quad (\varphi \in C(\Gamma))$

(Bauer [2], 43.4); für dieses gilt $\mu_x(\Gamma) = \int d\mu_x = \|x\|^2$.

Auf $C(\Gamma)$ ist das anfangs berechnete $J_x : C(\Gamma) \rightarrow H_x$,

$J_x f = j(f)x \quad (f \in C(\Gamma))$ linear, und für $f, g \in C(\Gamma)$ gilt

$$\int f^* g d\mu_x = \langle x | j(f^* g)x \rangle = \langle j(f)x | j(g)x \rangle = \langle J_x f | J_x g \rangle.$$

Da $C(\Gamma)$ dicht ist in $L_2(\Gamma, \mu_x)$ (Bauer [2], 43.5), läßt

sich J_x auf genau eine Weise stetig fortsetzen zu einer

isometrischen Abbildung $J_x : L_2(\Gamma, \mu_x) \rightarrow H_x$, die nach

Definition von H_x surjektiv, also unitär ist.

Für den für $\varphi \in C(\Gamma)$ definierten Operator $M_\varphi \in B(L_2(\Gamma, \mu_x))$

gilt für alle $f \in C(\Gamma)$

$$J_x M_\varphi f = J_x \varphi f = j(\varphi f)x = j(\varphi)j(f)x = j(\varphi)J_x f;$$

Dichtheit von $C(\Gamma)$ in $L_2(\Gamma, \mu_x)$ folgt $J_x M_\varphi = j(\varphi)J_x$.

Beweis von Satz 2.2. (i) Sei eine Familie $(x_\alpha; \alpha \in A) \subset H$, $\|x_\alpha\| = 1 \quad (\alpha \in A)$, gegeben, für die gilt

$H = \bigoplus (H_\alpha; \alpha \in A)$, mit $H_\alpha := H_{x_\alpha}$ (H_{x_α} definiert wie in

Hilfssatz 2.4). Für jedes $\alpha \in A$ erhalten wir nach

Hilfssatz 2.4 ein Baire - Maß $\mu_\alpha := \mu_{x_\alpha}$ und eine unitäre

Abbildung $J_\alpha := J_{x_\alpha} : L_2(\Gamma, \mu_\alpha) \rightarrow H_\alpha$. Die unitäre

Abbildung $J := \bigoplus (J_\alpha; \alpha \in A)$ hat die in Satz 2.2 behaupteten Eigenschaften.

(ii) Zur Konstruktion einer Familie $(x_\alpha; \alpha \in A)$ mit den in (i) genannten Eigenschaften bemerken wir zunächst: Sind $x, y \in H$, $y \perp H_x$, so gilt schon $H_y \perp H_x$. Ist nämlich $\langle y | x' \rangle = 0$ für alle $x' \in H_x$, so ist für alle $\varphi \in C(\Gamma)$ $\langle j(\varphi)y | x' \rangle = \langle y | j(\varphi^*)x' \rangle = 0$ wegen $j(\varphi^*)x' \in H_x$; aus der Definition von H_y folgt $H_y \perp H_x$.

α) Ist H separabel, so gewinnt man (x_α) , ausgehend von einer dichten Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, durch Induktion und erhält zugleich $A \subset \mathbb{N}$.

β) Ist H nicht separabel, so erhält man (x_α) mit Hilfe des Zorn'schen Lemma.

Diese Standardbeweise wollen wir nicht ausführen.

2.5 Satz (Spektraldarstellung kommutativer Familien beschränkter selbstadjungierter Operatoren).

Seien H ein Hilbertraum, $(T_\lambda; \lambda \in \Lambda) \subset B(H)$ eine kommutative Familie von selbstadjungierten Operatoren, $\Gamma := \prod([- \|T_\lambda\|, \|T_\lambda\|]; \lambda \in \Lambda)$. Dann gilt:

a) Es existiert genau ein $*$ -Algebrenhomomorphismus

$j: C(\Gamma) \rightarrow B(H)$ mit den Eigenschaften

$j(1) = I$, $j(\text{pr}_\lambda) = T_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$)

($\text{pr}_\lambda: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Projektion $\text{pr}_\lambda(z_\lambda; \lambda \in \Lambda) := z_\lambda$ auf die λ -Komponente von Γ).

b) Es existieren eine Familie $(\mu_\alpha; \alpha \in A)$ von Baire-Maßen auf Γ und eine unitäre Abbildung

$J: \bigoplus (L_2(\Gamma, \mu_\alpha); \alpha \in A) \rightarrow H$, so daß gilt

$$T_\lambda = J M_{\text{pr}_\lambda} J^* \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Ist H separabel, so kann $A \subset \mathbb{N}$ gewählt werden.

Beweis von Satz 2.5 für den Fall $\Lambda = \{1\}$.

a) Sei $T := T_1$. Die Forderungen $j(1) = I$ und $j(\text{id}) = j(\text{pr}_1) = T$ implizieren $j(p) = p(T)$ für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$.

Ist p ein Polynom mit $p(z) \geq 0$ für $z \in \Gamma (= [-\|T\|, \|T\|])$, so ist $p(T) \geq 0$; zum Beweis verweisen wir auf Riesz - Sz.-Nagy [28], Nr.106.

Für beliebige Polynome p folgt daraus wie in Bemerkung 3.2,b

$$\begin{aligned} \|p(T)x\|^2 &= \langle x | p(T)^* p(T)x \rangle = \langle x | |p|^2(T)x \rangle \\ &\leq \langle x | \|p\|_\infty^2 x \rangle = \|p\|_\infty^2 \|x\|^2 \quad (x \in H), \quad \|p(T)\| \leq \|p\|_\infty. \end{aligned}$$

Da die Polynome dicht sind in $C(\Gamma)$ (Satz von Weierstraß), können wir j auf genau eine Weise stetig auf $C(\Gamma)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung hat die im Satz genannten Eigenschaften; mit Bemerkung 2.3,b folgt die Eindeutigkeit von j .

b) folgt aus a) und Satz 2.2.

2.6 Hilfssatz.

Sei μ ein Borel-Maß auf $\mathbb{R}$, $\text{supp } \mu$ kompakt,

$T := M_{\text{id}} \in B(L_2(\mathbb{R}, \mu))$ (zu " M_{id} " vgl. Bezeichnung 2.1).

$C \in B(L_2(\mathbb{R}, \mu))$ sei mit T vertauschbar.

Dann gibt es eine μ -wesentlich beschränkte Borel-Funktion $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, so daß gilt $C = M_c$.

Beweis. $c := C 1 \in L_2(\mathbb{R}, \mu)$ ist Borel-meßbar.

Für jedes Polynom p gilt

$$Cp = Cp(T) 1 = p(T) C 1 = p(T) c = pc = cp .$$

Da die Polynome in $L_2(\mathbb{R}, \mu)$ dicht sind (Satz von Weierstraß zusammen mit Bauer [2], 43.5), folgt die Behauptung.

2.7 Hilfssatz.

Seien μ und T wie in Hilfssatz 2.6. Die Operatoren $C_0, C_1, \dots, C_n \in B(L_2(\mathbb{R}, \mu))$ seien mit T vertauschbar, und für $-\|T\| \leq \eta \leq \|T\|$ gelte $\sum (C_k \eta^k; k=0, \dots, n) \geq 0$. Dann gilt $\sum (C_k T^k; k=0, \dots, n) \geq 0$.

Beweis. Nach Hilfssatz 2.6 gibt es μ -wesentlich beschränkte Borel-Funktionen $c_0, c_1, \dots, c_n$, für die gilt $C_k = M_{c_k}$ ($k=0, \dots, n$).

Die Voraussetzung $\sum C_k \eta^k \geq 0$ bedeutet gerade $\sum c_k(\cdot) \eta^k \geq 0$ μ -fast überall für $-\|T\| \leq \eta \leq \|T\|$ (vgl. Bemerkung 2.1,d).

Sei (η_j) eine in $[-\|T\|, \|T\|]$ dichte Folge, $N_j \subset \mathbb{R}$ eine μ -Nullmenge, so daß

$$\sum c_k(z) \eta_j^k \geq 0 \text{ ist für alle } z \in [-\|T\|, \|T\|] \setminus N_j \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Dann ist $\sum c_k(z) \eta_j^k \geq 0$ für alle $z \in [-\|T\|, \|T\|] \setminus N$, mit $N := \bigcup (N_j; j \in \mathbb{N})$, und alle $j \in \mathbb{N}$.

Aus der Dichtheit von (η_j) folgt

$$\sum c_k(z) \eta^k \geq 0 \text{ für alle } z \in [-\|T\|, \|T\|] \setminus N, \eta \in [-\|T\|, \|T\|],$$

daher $\sum c_k(z) z^k \geq 0$ für alle $z \in [-\|T\|, \|T\|] \setminus N$.

Wegen $\text{supp } \mu \subset [-\|T\|, \|T\|]$ (vgl. Bemerkung 2.1,e) folgt daraus $\sum C_k T^k = M \left(\sum c_k \text{id}^k \right) \geq 0$.

2.8 Hilfssatz.

Sei H ein Hilbertraum, $T, C_0, C_1, \dots, C_n \in B(H)$,

T selbstadjungiert, vertauschbar mit C_k ($k=0, \dots, n$).

Für $-\|T\| \leq \eta \leq \|T\|$ sei $\sum (C_k \eta^k; k=0, \dots, n) \geq 0$.

Dann gilt $\sum (C_k T^k; k=0, \dots, n) \geq 0$.

Beweis. Sei $x \in H$, wir haben zu zeigen $\langle x | \sum C_k T^k x \rangle \geq 0$.

Für den Operator T erhalten wir zunächst

$j: C([- \|T\|, \|T\|]) \rightarrow B(H)$ gemäß Satz 2.5, a, der ja für den Fall $\Delta = \{1\}$ schon bewiesen ist.

Sodann gewinnen wir H_x, μ_x, J_x gemäß Hilfssatz 2.4.

Sei P_x die Orthogonalprojektion auf H_x , $T_x := T|_{H_x}$ (H_x ist reduzierender Teilraum von T wegen $T(H_x) \subset H_x$ und $T^* = T$; vgl. §1, b), $C'_k := P_x C_k|_{H_x}$.

Für $-\|T_x\| \leq \eta \leq \|T_x\|$ (es gilt $\|T_x\| \leq \|T\|$) und $y \in H_x$ gilt
 $\langle y | \sum C'_k \eta^k y \rangle = \langle y | P_x \sum C_k \eta^k y \rangle = \langle y | \sum C_k \eta^k y \rangle \geq 0$,
 also $\sum C'_k \eta^k \geq 0$.

Weiterhin gilt für $k=0, \dots, n$

$$C'_k T_x = P_x C_k T_x = P_x T C_k|_{H_x} = T_x P_x C_k|_{H_x} = T_x C'_k.$$

Durch J_x wird eine unitäre Äquivalenz zwischen dem in

Hilfssatz 2.7 gegebenen Operator T in $L_2(\mathbb{R}, \mu_x)$ und dem

Operator T_x vermittelt. Daher können wir Hilfssatz 2.7

anwenden auf die Operatoren $J_x^* T_x J_x$ und $J_x^* C'_k J_x$, $k=0, \dots, n$,

und erhalten $\sum J_x^* C'_k T_x^k J_x \geq 0$, $\sum C'_k T_x^k \geq 0$;

insbesondere folgt $0 \leq \langle x | \sum C'_k T_x^k x \rangle = \langle x | \sum C_k T^k x \rangle$.

Beweis von Satz 2.5 für beliebiges Δ .

a) (i) $m \in \mathbb{N}$, $\Delta = \{1, \dots, m\}$. Wegen der Forderungen $j(1) = I$ und $j(pr_k) = T_k$ ($k=1, \dots, m$) muß für alle Polynome

$p \in \mathbb{C}[(X_k; k=1, \dots, m)]$ gelten $j(p) = p(T_1, \dots, T_m)$.

Wie im Beweis für den Fall $\Lambda = \{1\}$ sieht man, daß es genügt zu zeigen:

$p \in \mathbb{C}[(X_k; k=1, \dots, m)]$, $p(z_1, \dots, z_m) \geq 0$ für alle $(z_1, \dots, z_m) \in \Gamma$ impliziert $p(T_1, \dots, T_m) \geq 0$.

Wir zeigen dies durch Induktion.

Für $m=1$ ist der Beweis schon geführt.

Sei die Behauptung für $m-1$ schon bewiesen, p ein Polynom in m Unbestimmten, $p(z_1, \dots, z_m) \geq 0$ für alle $(z_1, \dots, z_m) \in \Gamma$.

Für $\eta \in [-\|T_m\|, \|T_m\|]$ ist $p(X_1, \dots, X_{m-1}, \eta)$ ein Polynom in $m-1$ Unbestimmten,

$p(z_1, \dots, z_{m-1}, \eta) \geq 0$ für $(z_1, \dots, z_{m-1}) \in \Pi(-\|T_k\|, \|T_k\|)$;
 $k=1, \dots, m-1$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist also

$p(T_1, \dots, T_{m-1}, \eta) \geq 0$ für alle $\eta \in [-\|T_m\|, \|T_m\|]$.

Nach Voraussetzung sind in

$p(T_1, \dots, T_{m-1}, \eta) = \sum (C_k \eta^k; k=0, \dots, n)$ die Operatoren C_k vertauschbar mit T_m ($k=0, \dots, n$).

Mit Hilfssatz 2.8 folgt $p(T_1, \dots, T_m) = \sum C_k T_m^k \geq 0$.

(ii) Λ beliebig. Aus den Forderungen $j(1) = I$ und $j(\text{pr}_\lambda) = T_\lambda$ folgt wie bisher $j(p) = p(T_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[(X_\lambda; \lambda \in \Lambda)]$. Da ein solches Polynom nur von endlich vielen Unbestimmten abhängt, folgt aus dem bisher Bewiesenen:

$p \in \mathbb{C}[(X_\lambda; \lambda \in \Lambda)]$, $p(z_\lambda; \lambda \in \Lambda) \geq 0$ für alle $(z_\lambda; \lambda \in \Lambda) \in \Gamma$ impliziert $p(T_\lambda; \lambda \in \Lambda) \geq 0$.

Da die Menge $\{\Gamma \ni z \mapsto p(z_\lambda; \lambda \in \Lambda); p \in \mathbb{C}[(X_\lambda; \lambda \in \Lambda)]\}$ dicht in $C(\Gamma)$ ist (Satz von Stone-Weierstraß; vgl. auch

Bourbaki [7], §4.2 und §4.3), folgen Existenz und Eindeutigkeit der Abbildung j wie im Beweis für den Fall $\Lambda = \{1\}$.

b) folgt aus a) und Satz 2.2.

2.9 Bemerkung. Einen etwas kürzeren Beweis von Satz 2.5 erhält man unter Benutzung der Gelfandtheorie. Und zwar arbeitet man zunächst mit der von $\{T_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ erzeugten B^* -Algebra und nimmt als Γ das Spektrum dieser Algebra. (vgl. Dunford-Schwartz [11], IX.3.1, 3.4 und 3.7). Um die Maße dann nicht auf dem abstrakten Raum Γ , sondern auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^\Lambda$ definiert zu bekommen - dieser Punkt ist uns hinsichtlich späterer Anwendungen besonders wichtig -, benutzt man das gemeinsame Spektrum von $(T_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ (vgl. Bourbaki [8], I, §3.5).

2.10 Voraussetzungen.

Seien H ein Hilbertraum, $T = (T_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ eine kommutative Familie von selbstadjungierten Operatoren in H , $T_\lambda \in B(H)$ für fast alle $\lambda \in \Lambda$, d.h. es gibt eine endliche Menge $L \subset \Lambda$, so daß gilt $T_\lambda \in B(H)$ ($\lambda \in \Lambda \setminus L$).

Sei $\Gamma := \mathbb{R}^{|L|} \times \prod([- \|T_\lambda\|, \|T_\lambda\|]; \lambda \in \Lambda \setminus L)$.

2.11 Satz (Spektraldarstellung kommutativer Familien selbstadjungierter Operatoren).

Die Voraussetzungen 2.10 seien erfüllt.

Dann existiert eine abzählbare orthogonale Zerlegung

$H = \bigoplus (H_k; k \in \mathbb{N})$ in abgeschlossene lineare Teilräume, so daß H_k reduzierender Teilraum von T ist mit

$T_{H_k} \subset B(H_k)$ ($k \in \mathbb{N}$) (T_{H_k} = Teil von T in H_k ; §1, b).

T besitzt eine Spektraldarstellung, d.h. es existieren eine Familie $(\mu_\alpha; \alpha \in A)$ von Baire-Maßen auf Γ und

eine unitäre Abbildung

$J: \oplus(L_2(\Gamma, \mu_\alpha); \alpha \in A) \rightarrow H$, so daß gilt

$$T_\lambda = J M_{\text{pr}_\lambda} J^* \quad (\lambda \in \Lambda).$$

In dieser Spektraldarstellung können $(\mu_\alpha; \alpha \in A)$ und J so gewählt werden, daß $\text{supp } \mu_\alpha$ kompakt ist ($\alpha \in A$).

Ist H separabel, so kann $A \subset \mathbb{N}$ gewählt werden.

Beweis. Sei $\Lambda' := \Lambda \setminus L$, $L = \{1, \dots, m\}$.

Für $j = 1, \dots, m$ definieren wir den normalen Operator

$$R_j := (iI - T_j)^{-1} \in B(H) \quad (\text{vgl. Kato [21], V-§3.4 und §3.5})$$

und die selbstadjungierten Operatoren

$$S_j^I := \frac{1}{2}(R_j + R_j^*), \quad S_j^II := \frac{1}{2i}(R_j - R_j^*).$$

Aus den Voraussetzungen folgt (vgl. §1, b zu "vertauschbar"), daß die Familie

$(S_j^I, S_j^{II}; j = 1, \dots, m) U(T_\lambda; \lambda \in \Lambda') \subset B(H)$ kommutativ ist.

$$\text{Mit } \Gamma' := \prod([- \|S_j^I\|, \|S_j^I\|] \times [- \|S_j^{II}\|, \|S_j^{II}\|]; j = 1, \dots, m) \times \\ \times \prod([- \|T_\lambda\|, \|T_\lambda\|]; \lambda \in \Lambda')$$

gelten daher die Behauptungen von Satz 2.5.

Ohne Einschränkung wollen wir im folgenden annehmen, daß $H = \oplus(L_2(\Gamma', \mu_\alpha); \alpha \in A)$ ist mit den in der Behauptung von Satz 2.5, b gegebenen μ_α und daß die zugehörige unitäre Abbildung J die Identität I in H ist.

Wegen $R_j = S_j^I + S_j^{II}$ gibt es stetige Funktionen $r_j: \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}$, so daß $R_j = M_{r_j}$ ist ($j = 1, \dots, m$). Aus der Invertierbarkeit von $R_j (= (iI - T)^{-1})$ folgt (vgl. Bemerkung 2.1, f)

$$\mu_\alpha(\{\zeta \in \Gamma'; r_j(\zeta) = 0\}) = 0 \quad (\alpha \in A) \quad (j = 1, \dots, m).$$

Sei $\Gamma_0 := \bigcup(\{\zeta \in \Gamma'; r_j(\zeta) = 0\}; j = 1, \dots, m)$.

Für $k = 1, 2, 3, \dots$ definieren wir

$$\Gamma_k := \{z \in \Gamma' ; |r_j(z)| \geq k^{-1} \ (j=1, \dots, m)\} \setminus \Gamma_{k-1}.$$

Dann ist $\Gamma' = \bigcup (\Gamma_k ; k \in \mathbb{N}_0)$ disjunkte Vereinigung.

Mit $H_k := \bigoplus (L_2(\Gamma_k, \mu_\alpha|_{\Gamma_k}) ; \alpha \in A)$ gilt

$H = \bigoplus (H_k ; k \in \mathbb{N})$ (wegen $\mu_\alpha(\Gamma_0) = 0$ ($\alpha \in A$) wird der Index $k=0$ dabei nicht benötigt), und die Operatoren T_λ ($\lambda \in \Lambda'$) und S_j', S_j'', R_j, T_j ($j=1, \dots, m$) werden von H_k reduziert ($k \in \mathbb{N}$).

Für $z \in \Gamma_k$ ist $|r_j(z)| \geq k^{-1}$, $|r_j(z)^{-1}| \leq k$; aus

Bemerkung 2.1,e und f) folgt

$$\|(R_j)_{H_k}^{-1}\| \leq k, \quad (T_j)_{H_k} = iI_{H_k} - (R_j)_{H_k}^{-1} \in B(H_k) \\ (j=1, \dots, m, k \in \mathbb{N}).$$

Damit ist die erste Aussage des Satzes bewiesen.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten zusammen mit Satz 2.5,b.

2.12 Definition.

Die Voraussetzungen 2.10 seien gegeben. Für $x \in H$ definieren wir den von x unter T erzeugten Teilraum $H_x := \bigcap (G ; G \subset H \text{ abgeschlossener Teilraum, } x \in G, \\ G \text{ reduziert } T).$

Wir schreiben $H_{x,T}$, wenn wir die Abhängigkeit von der Familie T hervorheben wollen.

Nach §1,b ist H_x ein reduzierender Teilraum von T , der kleinste das Element x enthaltende.

2.13 Satz.

Die Voraussetzungen 2.10 seien gegeben, sei $x \in H$.

Dann gibt es genau ein endliches Baire-Maß μ_x auf Γ , so daß gilt:

Es existiert eine isometrische Abbildung

$$J_x : L_2(\Gamma, \mu_x) \rightarrow H \quad \text{mit den Eigenschaften}$$

$$T_\lambda J_x = J_x M_{\text{pr}_\lambda} \quad (\lambda \in \Lambda), \quad J_x 1 = x.$$

Für dieses Maß ist $\mu_x(\Gamma) = \|x\|^2$, es gilt $R(J_x) = H_x$, und J_x ist eindeutig bestimmt.

Ist $J : \bigoplus (L_2(\Gamma, \mu_\alpha); \alpha \in \Lambda) \rightarrow H$ eine Spektraldarstellung von T wie in Satz 2.11, $f = (f_\alpha) = J^{-1}x$, so gilt $\mu_x = \sum (|f_\alpha|^2 \mu_\alpha; \alpha \in \Lambda)$.

2.14 Hilfssatz.

Die Voraussetzungen 2.10 seien gegeben.

Sei $x \in H$, μ_x ein endliches Baire-Maß auf Γ ,

$J_x : L_2(\Gamma, \mu_x) \rightarrow H$ eine isometrische Abbildung mit

$$T_\lambda J_x = J_x M_{\text{pr}_\lambda} \quad (\lambda \in \Lambda), \quad J_x 1 = x.$$

Sei $y \in R(J_x)$. Wir definieren $g := J_x^{-1}y$, $\mu_y := |g|^2 \mu_x$,

$J_y : L_2(\Gamma, \mu_y) \rightarrow H$ durch $J_y h := J_x(gh)$ ($h \in L_2(\Gamma, \mu_y)$).

Dann ist J_y isometrisch und es gilt

$$T_\lambda J_y = J_y M_{\text{pr}_\lambda} \quad (\lambda \in \Lambda), \quad J_y 1 = y.$$

Beweis. Für $h \in L_2(\Gamma, \mu_y)$ gilt

$$\begin{aligned} \|J_y h\|^2 &= \|J_x(gh)\|^2 = \int |h(z)|^2 |g(z)|^2 d\mu_x(z) \\ &= \int |h(z)|^2 d\mu_y(z) = \|h\|_{L_2(\Gamma, \mu_y)}^2, \end{aligned}$$

$$J_y 1 = J_x(g1) = y,$$

$$T_\lambda J_y = T_\lambda J_x(g.) = J_x \underbrace{M_{\text{pr}_\lambda}}_{\text{in } L_2(\Gamma, \mu_x)}(g.) = J_x \underbrace{M_{\text{pr}_\lambda}}_{\text{in } L_2(\Gamma, \mu_y)} \quad (\lambda \in \Lambda),$$

wobei man sich in der letzten Gleichungskette von der Gleichheit der Definitionsbereiche überzeugt.

Beweis von Satz 2.13. (i) Für die Existenz benutzen wir die Aussage von Satz 2.11 mit den dort gewählten Bezeichnungen.

Für $f = (f_\alpha) := J^{-1}x$ gilt

$$\sum (\int |f_\alpha|^2 d\mu_\alpha; \alpha \in A) = \|f\|^2 = \|x\|^2; \text{ daher existiert}$$

$$\mu_x := \sum (|f_\alpha|^2 \mu_\alpha; \alpha \in A). \text{ Für } g \in L_2(\Gamma, \mu_x) \text{ ist}$$

$$\begin{aligned} \|(gf_\alpha; \alpha \in A)\|^2 &= \sum \int |gf_\alpha|^2 d\mu_\alpha = \sum \int |g|^2 |f_\alpha|^2 d\mu_\alpha \\ &= \int |g|^2 d\mu_x = \|g\|_{L_2(\Gamma, \mu_x)}^2, \end{aligned}$$

$$\text{also } (gf_\alpha) \in \oplus (L_2(\Gamma, \mu_\alpha); \alpha \in A).$$

Damit ist die durch $J_x g := J(gf_\alpha)$ ($g \in L_2(\Gamma, \mu_x)$)

definierte lineare Abbildung $J_x: L_2(\Gamma, \mu_x) \rightarrow H$ isometrisch,

es gilt $J_x 1 = J(f_\alpha) = x$, und man verifiziert

$$J_x M_{pr_\lambda} = T_\lambda J_x \quad (\lambda \in \Lambda). \text{ Außerdem folgt } \mu_x(\Gamma) = \|x\|^2.$$

(ii) Für die Eindeutigkeit nehmen wir zunächst an

$T_{H_x} \subset B(H_x)$ und erhalten μ_x und $J_x: L_2(\Gamma, \mu_x) \rightarrow H_x$ gemäß

Teil (i) für die Familie T_{H_x} . Da $R(J_x)$ ein reduzierender

Teilraum von T ist, folgt $R(J_x) \supset H_x$, $R(J_x) = H_x$. Daher

sind die Familien $(M_{pr_\lambda}; \lambda \in \Lambda)$ in $L_2(\Gamma, \mu_x)$ und T_{H_x} in

H_x unitär äquivalent, und wegen $T_{H_x} \subset B(H_x)$ und Bemerkung 2.1,e ist $\text{supp } \mu_x$ kompakt. Ist μ' ein zweites Maß,

J' die zugehörige isometrische Abbildung, so folgt aus den

Voraussetzungen, daß für alle Polynome $p \in \mathcal{C}[(X_\lambda; \lambda \in \Lambda)]$

$$\text{gilt } J'p = J_x p \text{ und } \int p(z) d\mu'(z) = \int p(z) d\mu_x(z).$$

Durch Einsetzen der Polynome $p = (pr_\lambda)^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \Lambda$)

sieht man, daß auch $\text{supp } \mu'$ kompakt ist.

Da die Polynome dicht in $C(\Gamma')$ sind für jede kompakte

Menge $\Gamma' \subset \Gamma$ (Satz von Stone-Weierstraß), gilt $\mu' = \mu_x$

und $J'f = J_x f$ ($f \in C(\Gamma')$). Aus der Dichtheit von $C(\Gamma')$ in

$L_2(\Gamma, \mu_x)$ (Bauer [2], 43.5) folgt $J' = J_x$. Für diesen Fall

sind damit alle Aussagen des Satzes bewiesen.

(iii) Für allgemeines $x \in H$ habe das Maß μ die im Satz genannten Eigenschaften, J sei die zugehörige Isometrie. Da $R(J)$ ein reduzierender Teilraum von T ist mit $x \in R(J)$, folgt $H_x \subset R(J)$. Aus Satz 2.11 folgt, daß es eine Folge $(x_n) \subset H_x$ gibt mit den Eigenschaften $x_n \rightarrow x$, $T_{H_{x_n}} \subset B(H_{x_n})$ ($n \in \mathbb{N}$).

Für $f_n := J^{-1}x_n$ gilt $f_n \rightarrow 1$ in $L_2(\Gamma, \mu)$, und $\mu_n := |f_n|^2 \mu$ ist nach Hilfssatz 2.14 und Teil (ii) des Beweises das dem Element x_n zugeordnete Maß μ_{x_n} . Für jede Baire-Menge $B \subset \Gamma$ gilt

$$\mu(B) = \int_B d\mu = \lim \left(\int_B |f_n|^2 d\mu; n \rightarrow \infty \right) = \lim (\mu_{x_n}(B); n \rightarrow \infty);$$

daraus folgt die Eindeutigkeit von μ .

Ist $g \in C_0(\Gamma)$ (d.h. g stetig mit kompaktem Träger), so ist $J(f_n g) \in H_{x_n}$ nach Hilfssatz 2.14 und Teil (ii) des Beweises; es gilt $f_n g \rightarrow g$ in $L_2(\Gamma, \mu)$, $J(f_n g) \rightarrow Jg \in H_x$ wegen $J(f_n g) \in H_{x_n} \subset H_x$ ($n \in \mathbb{N}$); also enthält $J^{-1}H_x$ den Raum $C_0(\Gamma)$.

Da $C_0(\Gamma)$ dicht in $L_2(\Gamma, \mu)$ ist (Bauer [2], 43,5), folgt $J^{-1}H_x = L_2(\Gamma, \mu)$, $R(J) = H_x$. Da außerdem $J(f_n \cdot)$ die dem Element x_n zugeordnete Isometrie ist, folgt auch die Eindeutigkeit von J .

2.15 Definition.

Die Voraussetzungen 2.10 seien gegeben, sei $x \in H$. Das Maß μ_x , dessen Existenz und Eindeutigkeit in Satz 2.13 nachgewiesen wurden, heißt das von x (unter T) erzeugte Maß. Wegen der Abhängigkeit von T schreiben wir auch $\mu_{x,T}$.

2.16 Funktionalkalkül.

Die Voraussetzungen 2.10 seien gegeben.

Dann existiert eine Abbildung j , die jeder beschränkten Baire - Funktion $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ einen normalen Operator

$j(h) \in B(H)$ zuordnet, mit den folgenden Eigenschaften:

- a) j ist ein $*$ -Algebrenhomomorphismus mit $j(1) = I$;
- b) ist (h_n) eine Folge beschränkter Baire - Funktionen mit $|h_n| \leq |p_{\lambda}|$, $h_n(z) \rightarrow p_{\lambda}(z)$ ($z \in \Gamma$), so gilt $j(h_n)x \rightarrow T_{\lambda}x$ für alle $x \in D(T_{\lambda})$ ($\lambda \in \Delta$);
- c) gilt $h_n(z) \rightarrow h(z)$ ($z \in \Gamma$) und $(\|h_n\|_{\infty})$ ist beschränkt, so gilt $j(h_n)x \rightarrow j(h)x$ für alle $x \in H$.

Durch diese Eigenschaften ist j eindeutig bestimmt;

es gilt $\|j(h)\| \leq \|h\|_{\infty}$.

d) Ist $J: \bigoplus (L_2(\Gamma, \mu_{\alpha}); \alpha \in A) \rightarrow H$ eine Spektraldarstellung von T gemäß Satz 2.11, so gilt $j(h) = J M_h J^*$ für jede beschränkte Baire - Funktion $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$;

e) ist $x \in H$, J_x und μ_x wie in Satz 2.13, so gilt $J_x M_h = j(h) J_x$ ($h: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkte Baire - Funktion), wo M_h den Multiplikationsoperator in $L_2(\Gamma, \mu_x)$ bezeichnet.

Für beschränkte Baire - Funktionen $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ schreiben wir auch $h(T) := j(h)$.

(vgl. Reed - Simon [27], Theorem VI.2 und Theorem VIII.5)

Beweis. Die Aussage $\|j(h)\| \leq \|h\|_{\infty}$ folgt aus a) wie in Bemerkung 2.3, b).

(i) Hat man eine Spektraldarstellung von T gemäß Satz 2.11 gegeben, so hat die in d) angegebene Abbildung $j, j(h) := J M_h J^*$ die Eigenschaften a), b), c). Zum Beweis

kann man annehmen, daß $H = \bigoplus (L_2(\Gamma, \mu_\alpha); \alpha \in A)$ und $J = I$ ist. Dann ist die Eigenschaft a) klar, b) und c) folgen aus dem Satz von Lebesgue (von der majorisierten Konvergenz).

(ii) Zum Beweis der Eindeutigkeit und der Eigenschaft e) sei j eine Abbildung mit den Eigenschaften a), b), c).

Sei (Γ_k) eine aufsteigende Folge von kompakten Baire-Mengen $\Gamma_k \subset \Gamma$ mit $\bigcup \Gamma_k = \Gamma$; sei $\chi_k := \chi_{\Gamma_k}$.

Wegen $(i - \text{pr}_\lambda)^{-1} \chi_k (i - \text{pr}_\lambda) = \chi_k$ erhält man für $x \in D(T_\lambda)$:

$$x = j(1)x \xleftarrow{(d)} j(\chi_k)x \xrightarrow{(a)} j((i - \text{pr}_\lambda)^{-1} \cdot (j(i\chi_k)x - j(\chi_k \text{pr}_\lambda)x)) \xrightarrow{(c,b)} j((i - \text{pr}_\lambda)^{-1})(i - T_\lambda)x,$$

$x = j((i - \text{pr}_\lambda)^{-1})(i - T_\lambda)x$, woraus folgt

$$j((i - \text{pr}_\lambda)^{-1}) = (i - T_\lambda)^{-1} \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Sei $x \in H$.

Aus c) folgt, daß die Abbildung

$$\mu: \Omega \mapsto \langle x | j(\chi_\Omega)x \rangle \quad (\Omega \text{ Baire'sche Teilmenge von } \Gamma)$$

ein endliches Baire-Maß auf Γ ist. Mit der aus a)

abgeleiteten Stetigkeit sieht man, daß für beschränkte

$$\text{Baire-Funktionen } h: \Gamma \rightarrow \mathbb{C} \text{ gilt } \langle x | j(h)x \rangle = \int h d\mu.$$

Definiert man für beschränkte Baire-Funktionen $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$

$Jh := j(h)x$, so zeigt man wie im Beweis von

Hilfssatz 2.4, daß man J stetig auf $L_2(\Gamma, \mu)$ zu einer isometrischen Abbildung fortsetzen kann, für die gilt

$$JM_g = j(g)J \quad (g: \Gamma \rightarrow \mathbb{C} \text{ beschränkte Baire-Funktion}).$$

Setzt man hier insbesondere $g = (i - \text{pr}_\lambda)^{-1}$, so schließt

man daraus auf $JM_{\text{pr}_\lambda} = T_\lambda J \quad (\lambda \in \Lambda)$. Da außerdem

$J1 = j(1)x = x$ gilt, hat J die in Satz 2.13 genannten Eigenschaften, so daß gilt $\mu = \mu_x$, $J = J_x$ mit den

eindeutig bestimmten μ_x und J_x aus Satz 2.13.

Daraus folgt, daß j die Eigenschaft e) hat und daß für jede beschränkte Baire-Funktion $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ gilt $j(h)x = Jh = J_x h$, woraus die Eindeutigkeit von j folgt.

2.17 Folgerung.

Die Voraussetzungen 2.10 seien gegeben.

$h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Baire-Funktion. Für jede beschränkte Borel-Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist dann $g \circ h: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt und Baire-meßbar.

Es gilt $g(h(T)) = g \circ h(T)$.

Beweis. Man verifiziert, daß $g \mapsto g \circ h(T)$ ein Funktional-kalkül von $h(T)$ ist. Aus der Eindeutigkeit folgt die Behauptung.

2.18 Definition.

Die Voraussetzungen 2.10 seien gegeben. Für jede Baire-Menge $\Omega \subset \Gamma$ ist

$E(\Omega) := \chi_{\Omega}(T)$ ($= j(\chi_{\Omega})$, vgl. Funktional-kalkül 2.16) eine orthogonale Projektion in H . Nach dem Funktional-kalkül 2.16 ist

$E: \Omega \mapsto E(\Omega)$ ein stark σ -additives Projektions-wertiges Maß; E heißt (gemeinsames) Spektralmaß von T .

Aus dem Funktional-kalkül 2.16,e folgt $\langle x | E(\Omega)x \rangle = \mu_x(\Omega)$ ($x \in H$, $\Omega \subset \Gamma$ Baire-Menge).

Wollen wir hervorheben, daß E der Familie T zugeordnet ist, so schreiben wir E_T .

2.19 Bemerkung. Zunächst wollen wir anmerken, daß die in den Voraussetzungen 2.10 getroffene Wahl der endlichen Menge $L \subset \Lambda$, für die $T_\lambda \in B(H)$ ist für $\lambda \in \Lambda \setminus L$, keinen entscheidenden Einfluß auf die Aussagen 2.11 bis 2.18 hat. Seien nämlich $L, L' \subset \Lambda$ endliche Mengen, so daß $T_\lambda \in B(H)$ ist für $\lambda \in \Lambda \setminus (L \cup L')$. Sei

$$\Gamma := \mathbb{R}^{|L|} \times \prod ([-\|T_\lambda\|, \|T_\lambda\|]; \lambda \in \Lambda \setminus L),$$

$$\Gamma' := \mathbb{R}^{|L'|} \times \prod ([-\|T_\lambda\|, \|T_\lambda\|]; \lambda \in \Lambda \setminus L'),$$

j bzw. j' die Abbildung in Funktionalalkalkül 2.16, die zu Γ bzw. Γ' gehört.

Mit Hilfe von Funktionalalkalkül 2.16 zeigt man - zunächst für den Fall $L' \subset L$, dann allgemein -, daß für zwei beschränkte Baire-Funktionen $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, $h': \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h|_{\Gamma \cap \Gamma'} = h'|_{\Gamma \cap \Gamma'}$ gilt $j(h) = j'(h')$.

Seien jetzt die Voraussetzungen 2.10 gegeben, und j sei die in Funktionalalkalkül 2.16 gegebene Abbildung.

Wir definieren den Träger des gemeinsamen Spektralmaßes E von T als die abgeschlossene Menge

$$\text{supp } E := \Gamma \setminus \bigcup \{ \Omega; \Omega \text{ offene Teilmenge von } \Gamma, j(\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0(\Gamma) \text{ mit } \text{supp } \varphi \subset \Omega \}.$$

Aus den obigen Bemerkungen folgt, daß $\text{supp } E$ nicht von der speziellen Wahl von L in den Voraussetzungen 2.10 abhängt.

Mit Funktionalalkalkül 2.16,e folgert man, daß für jede Baire-Menge $\Omega \subset \Gamma$ mit $\text{supp } E \subset \Omega$ gilt $E(\Omega) = I$ und daß für zwei beschränkte Baire-Funktionen $g, h: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g|_{\text{supp } E} = h|_{\text{supp } E}$ gilt $j(g) = j(h)$.

Ist $\Lambda = \{1\}$ einelementig, $T = (T_1)$, so folgert man aus Funktionalalkalkül 2.16,d und Bemerkungen 2.1,e und f), daß $\text{supp } E = \sigma(T_1)$ ist ($\sigma(T_1) = \mathbb{C} \setminus \rho(T_1) = \text{Spektrum von } T_1$). Daher gilt $E(\sigma(T_1)) = I$, $E(\mathbb{R} \setminus \sigma(T_1)) = 0$, d.h. $\sigma(T_1)$ trägt das Spektralmaß E . $\sigma(T_1)$ ist die kleinste abgeschlossene Menge mit dieser Eigenschaft.

I. Verallgemeinerungen des Satzes von Weyl - von Neumann

§ 3 Endlich viele Operatoren

3.1 Satz.

Sei H ein separabler Hilbertraum, $m \in \mathbb{N}$, $(T_1, \dots, T_m)$ ein kommutatives m -Tupel von selbstadjungierten Operatoren in H .

Sei $p > m$, $\epsilon > 0$.

Dann existieren selbstadjungierte Operatoren

$K_1, \dots, K_m \in c_p$, $\|K_j\|_p \leq \epsilon$ ($j = 1, \dots, m$), so daß das m -Tupel $(D_j := T_j + K_j; j = 1, \dots, m)$ diagonal ist (vgl. §1, c für " c_p ", §1, b für "diagonal").

3.2 Bemerkungen. a) Für $m = 1$, $p = 2$ ergibt sich aus Satz 3.1 der Satz von Weyl - von Neumann (Weyl [34] für $p = \infty$, von Neumann [25] für $p = 2$). Kuroda [22] bewies für den Fall $m = 1$ ein noch schärferes Resultat: Nämlich kann in der Behauptung von Satz 3.1 statt $\|\cdot\|_p$ jede "unitär invariante Norm" genommen werden, die nicht äquivalent zu der c_1 -Norm ist. Beweise dieser Sätze findet man auch bei Kato [21], X-Theorem 2.1 und 2.3.

b) Für $m = 2$ erhält man aus Satz 3.1 den "Satz von Weyl - von Neumann für normale Operatoren". (Ist N ein normaler Operator in H , so sind $T_1 := \operatorname{Re} N := \frac{1}{2}(N + N^*)$ und $T_2 := \operatorname{Im} N := \frac{1}{2i}(N - N^*)$ vertauschbare selbstadjungierte Operatoren in H , und es gilt $N = T_1 + iT_2$. Dies ist klar, falls $N \in B(H)$ ist; für unbeschränktes N ergibt es sich aus der Tatsache, daß jeder normale Operator dargestellt werden kann als orthogonale Summe beschränkter normaler Operatoren: vgl. Sz.-Nagy [32], VIII, 1.) Diese Aussage für $p = \infty$ wurde von Berberian [3] und

Halmos [16] als Problem gestellt und von Berg [4], Sikonia [30] und Halmos [17] bewiesen. Berg [5] und Weidmann [33] zeigten, daß man mit - im wesentlichen - den Methoden von Berg und Sikonia den Satz auch für $p > 2$ beweisen kann.

Zum Beweis von Satz 3.1 benutzen wir die Methoden von Berg [4], [5], Sikonia [30], Weidmann [33].

(i) Sei zunächst $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ ein halb-offener Würfel der Kantenlänge 1, μ ein endliches Borel-Maß auf Γ ,

$$H = L_2(\Gamma, \mu),$$

$$T_j = M_{pr_j} \quad (j = 1, \dots, m).$$

Wir konstruieren selbstadjungierte Operatoren $D_1, \dots, D_m$,

$(D_1, \dots, D_m)$ gemeinsam diagonal, so daß für

$$K_j := D_j - T_j \quad (j = 1, \dots, m) \text{ gilt:}$$

$$K_j \in c_p, \quad \|K_j\|_p \leq 1 \cdot c(p) \quad \text{mit} \quad c(p) := 2^m \cdot \sum (2^{\frac{m}{p}-1})^i; \quad i \in \mathbb{N}_0).$$

Zunächst werden wir eine gemeinsame Eigenbasis von

$(D_1, \dots, D_m)$ induktiv gewinnen.

Im 0-ten Schritt wählen wir

$$G_0 := \{\Gamma\}, \quad \varphi_{\Gamma,1} := \frac{\chi_\Gamma}{\|\chi_\Gamma\|}.$$

Im i-ten Schritt ($i \in \mathbb{N}$) bilden wir

$$G_i := \begin{cases} \text{Menge der halb-offenen Würfel, die aus den Würfeln} \\ \in G_{i-1} \text{ durch Halbieren parallel zu allen} \\ \text{Koordinatenebenen entstehen.} \end{cases}$$

Die Menge G_i hat $2^{i \cdot m}$ Elemente, die Kantenlänge eines jeden Würfels $\Delta' \in G_i$ ist $1 \cdot 2^{-i}$.

Für $\Delta \in G_{i-1}$ orthonormieren wir die Funktionenmenge

$$\begin{cases} \{\chi_\Delta\} \cup \{\chi_{\Delta'}; \Delta' \in G_i, \Delta' \subset \Delta\} & \text{in } L_2(\Gamma, \mu) \text{ zu} \\ \varphi_{\Gamma,1}, \varphi_{\Gamma,2}, \dots, \varphi_{\Gamma,k} & \text{falls } i=1 \text{ (dann } \Delta = \Gamma), \\ \frac{\chi_\Delta}{\|\chi_\Delta\|}, \varphi_{\Delta,1}, \varphi_{\Delta,2}, \dots, \varphi_{\Delta,k} & \text{falls } i=2,3,\dots; \end{cases}$$

es gilt $k_\Delta \leq 2^m$ (falls $\|\chi_\Delta\| = 0$ ist, setzen wir $k_\Delta = 0$);
damit erhalten wir ein Orthonormalsystem

$$(\varphi_{\Delta,k}; k=1, \dots, k_\Delta, \Delta \in G_{i-1}).$$

Insgesamt erhält man die Orthonormalfolge

$$(\varphi_{\Delta,k}; k=1, \dots, k_\Delta, \Delta \in G_i, i \in \mathbb{N}_0).$$

Diese ist eine Orthonormalbasis, da $\chi_\Delta \in L\{\varphi_{\Delta,k}; k, \Delta, i\}$
ist für alle $\Delta \in G := \bigcup (G_i; i \in \mathbb{N}_0)$ (im Sinne von $L_2(\Gamma, \mu)$;
"L{...}" ist die lineare Hülle von {...})

und da weiterhin $\{\chi_\Delta; \Delta \in G\}$ total in $L_2(\Gamma, \mu)$ ist.

Für jedes $\Delta \in G$ wählen wir $z_\Delta \in \Delta$, $z_\Delta = (z_{\Delta,1}, \dots, z_{\Delta,m})$.

Wir definieren für $j=1, \dots, m$

$$D_j := \sum (\sum (z_{\Delta,j} \langle \varphi_{\Delta,k} | \cdot \rangle \varphi_{\Delta,k}; k=1, \dots, k_\Delta); \Delta \in G).$$

Es ist klar, daß $(D_1, \dots, D_m)$ eine gemeinsam diagonale

Familie von selbstadjungierten Operatoren ist.

Es gilt

$$K_j = D_j - T_j = \sum_{\Delta \in G} \sum_{k=1}^{k_\Delta} (z_{\Delta,j} - \text{pr}_j) \langle \varphi_{\Delta,k} | \cdot \rangle \varphi_{\Delta,k} = \sum_{i=0}^{\infty} K_{ji},$$

$$\text{mit } K_{ji} = \sum_{\Delta \in G_i} \sum_{k=1}^{k_\Delta} \dots = \sum_{\Delta \in G_i} \sum_{k=1}^{2^m} \dots =$$

$$= \sum_{k=1}^{2^m} \sum_{\Delta \in G_i} (z_{\Delta,j} - \text{pr}_j) \langle \varphi_{\Delta,k} | \cdot \rangle \varphi_{\Delta,k},$$

wo bei der Summation $\sum_{k=1}^{k_\Delta} \dots = \sum_{k=1}^{2^m} \dots$ die nicht vor-
handenen Summanden Null gesetzt werden.

Für $1 \leq k \leq 2^m$ sind

$$(\varphi_{\Delta,k}; \Delta \in G_i) \text{ und } ((z_{\Delta,j} - \text{pr}_j) \varphi_{\Delta,k}; \Delta \in G_i)$$

orthogonale Systeme; weiterhin gilt

$$|z_{\Delta,j} - z_j| \leq 1 \cdot 2^{-i} \text{ für } z = (z_1, \dots, z_m) \in \Delta \in G_i;$$

unter Benutzung von §1,c erhält man daraus

$$\left\| \sum_{\Delta \in G_i} (z_{\Delta,j} - \text{pr}_j) \langle \varphi_{\Delta,k} | \cdot \rangle \varphi_{\Delta,k} \right\|_p^p =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum (\|\varphi_{\Delta,k}\| (\|z_{\Delta,j} - \text{pr}_j\| \varphi_{\Delta,k}\|)^p ; \Delta \in G_i) \\
&\leq \sum (1 \cdot 2^{-i})^p ; \Delta \in G_i) = 2^{i \cdot m} \cdot 1^p \cdot 2^{-i \cdot p} = 1^p \cdot 2^{i(m-p)}, \\
\|K_{ji}\|_p &\leq \sum_{\Delta \in G_i} \dots \|_p ; k=1, \dots, 2^m) \leq 2^{m \cdot 1 \cdot 2^{i(\frac{m}{p}-1)}}, \\
\|K_j\|_p &\leq \sum (\|K_{ji}\|_p ; i \in \mathbb{N}_0) \leq 1 \cdot 2^m \cdot \sum (2^{i(\frac{m}{p}-1)} ; i \in \mathbb{N}_0) = 1 \cdot c(p), \\
&\text{wo } c(p) < \infty \text{ ist wegen } \frac{m}{p} < 1.
\end{aligned}$$

(ii) Sei jetzt $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, $\mu, T_1, \dots, T_m$ wie in Teil (i) des Beweises.

Sei Δ ein halb-offener achsenparalleler Würfel, $\Gamma \subset \Delta$;

L sei die Kantenlänge von Δ .

Wir unterteilen Δ in n^m halb-offene Würfel

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n^m}$ der Kantenlänge $\frac{L}{n}$. Mit $\mu_q := \mu|_{\Gamma_q}$ gilt

$$\text{dann } L_2(\Gamma, \mu) = \bigoplus (L_2(\Gamma_q, \mu_q) ; q=1, \dots, n^m),$$

und für $j=1, \dots, m$ ist T_j die orthogonale Summe der Operatoren

$$T_{j,q} := (T_j)_{L_2(\Gamma_q, \mu_q)}, \quad q=1, \dots, n^m.$$

Für $\Gamma_q, \mu_q, (T_{1,q}, \dots, T_{m,q})$ bestimmen wir $K_{j,q}$ gemäß

Teil (i) und erhalten $K_{j,q} \in c_p(L_2(\Gamma_q, \mu_q))$,

$$\|K_{j,q}\|_p \leq L \cdot n^{-1} \cdot c(p) \quad (j=1, \dots, m) \quad (q=1, \dots, n^m).$$

Mit $K_j := \bigoplus (K_{j,q} ; q=1, \dots, n^m) \quad (j=1, \dots, m)$ erhalten wir nach §1,c

$$\|K_j\|_p^p = \sum (\|K_{j,q}\|_p^p ; q=1, \dots, n^m) \leq n^m L^p n^{-p} c(p)^p,$$

$$\|K_j\|_p \leq n^{\frac{m}{p}-1} \cdot L \cdot c(p).$$

Nach Konstruktion ist $(D_j := T_j + K_j ; j=1, \dots, m)$ diagonal.

Wegen $m < p$ können wir $\|K_j\|_p, j=1, \dots, m$, beliebig klein machen durch genügend hohe Wahl von $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Wir beweisen die volle Aussage des Satzes. Nach

Satz 2.11 ist $(T_1, \dots, T_m)$ unitär äquivalent zu einem m -Tupel von Multiplikationsoperatoren $(M_{pr_1}, \dots, M_{pr_m})$ in einer orthogonalen Summe $\bigoplus (L_2(\mathbb{R}^m, \mu_\alpha); \alpha \in A)$, wo $\text{supp } \mu_\alpha$ kompakt ist ($\alpha \in A$) und $A \subset \mathbb{N}$ gewählt werden kann, da H separabel ist. Da alle hier betrachteten Eigenschaften unitär invariant sind, können wir ohne Einschränkung annehmen

$$H = \bigoplus (L_2(\mathbb{R}^m, \mu_\alpha); \alpha \in A) \quad \text{und}$$

$$(T_1, \dots, T_m) = (M_{pr_1}, \dots, M_{pr_m}) .$$

Betrachten wir $H_\alpha := L_2(\mathbb{R}^m, \mu_\alpha)$ - kanonisch - als Teilraum von H , so wird $(T_1, \dots, T_m)$ von H_α reduziert, und $(T_{1,\alpha}, \dots, T_{m,\alpha}) := (T_1, \dots, T_m)_{H_\alpha}$, der Teil von $(T_1, \dots, T_m)$ in H_α , hat die in (ii) betrachtete Form.

Zu $(T_{1,\alpha}, \dots, T_{m,\alpha})$ konstruieren wir gemäß (ii) Operatoren $K_{1,\alpha}, \dots, K_{m,\alpha}$ so, daß gilt

$$\|K_{j,\alpha}\|_p \leq \varepsilon \cdot 2^{-\alpha/p} \quad (j = 1, \dots, m).$$

Für $K_j := \bigoplus (K_{j,\alpha}; \alpha \in A)$ gilt dann

$$\|K_j\|_p^p = \sum (\|K_{j,\alpha}\|_p^p; \alpha \in A) \leq \varepsilon^p \cdot \sum (2^{-\alpha}; \alpha \in \mathbb{N}) = \varepsilon^p \quad (j = 1, \dots, m)$$

(vgl. §1,c), und $(D_j := T_j + K_j; j = 1, \dots, m)$ ist nach Konstruktion diagonal.

§ 4 Abzählbar viele Operatoren

4.1 Satz.

Sei H ein separabler Hilbertraum, $T = (T_j; j \in \mathbb{N})$ eine kommutative Folge von selbstadjungierten Operatoren in H , fast alle $T_j \in B(H)$ (d.h. es existiert $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß $T_j \in B(H)$ ist für alle $j \geq j_0$).

Sei $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$.

Dann existieren selbstadjungierte Operatoren $K_j \in c_\infty$ ($j \in \mathbb{N}$), $\|K_j\| \leq \varepsilon$ ($j = 1, \dots, m$), so daß die Folge $(D_j := T_j + K_j; j \in \mathbb{N})$ gemeinsam diagonal ist.

4.2 Hilfssatz.

Sei H ein Hilbertraum, $T = (T_j; j \in \mathbb{N}) \subset B(H)$ eine kommutative Folge von selbstadjungierten Operatoren.

Dann existieren ein selbstadjungierter Operator $S \in B(H)$ und stetige Funktionen $\varphi_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt $T_j = \varphi_j(S)$ ($j \in \mathbb{N}$).

4.3 Bemerkung. Die Beweise von Satz 4.1 und Hilfssatz 4.2 stehen im wesentlichen bei Halmos [17], wo sie zum Beweis unseres Satz 3.1 für den Fall $m=2$ (bzw. eines normalen Operators), $p=\infty$ benutzt werden. Bezüglich der Aussage, die Hilfssatz 4.2 entspricht, steht dort auch schon die Bemerkung, daß sich der Beweis "with no additional effort" auf abzählbar viele Operatoren verallgemeinert. Zu Hilfssatz 4.2 vgl. auch Riesz - Sz.-Nagy [28], Nr.130, Satz, wo ein Beweis der bekannten Form von Hilfssatz 4.2 gegeben wird, bei der man nur meßbare Funktionen φ_j bekommt.

Beweis von Hilfssatz 4.2. Sei $\Gamma := \prod([- \|T_j\|, \|T_j\|] ; j \in \mathbb{N})$, $\Gamma_0 \subset [0, 1]$ das Cantor'sche Diskontinuum (vgl. Bemerkung 6.5, b). Da Γ kompakt und metrisierbar ist, gibt es eine stetige surjektive Abbildung $\varphi: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ (vgl. Franz [13], Satz 33.2). Für die Funktion $\psi: \Gamma \rightarrow \Gamma_0$, definiert durch $\psi(z) := \inf \{s \in \Gamma_0 ; \varphi(s) = z\}$ gilt

a) $\varphi \circ \psi = \text{id}_\Gamma$,

b) ψ ist Borel-meßbar.

zu a) Da φ stetig ist, gilt für $z \in \Gamma$

$$\psi(z) = \min \{s \in \Gamma_0 ; \varphi(s) = z\} =: s_0, \quad \varphi \circ \psi(z) = \varphi(s_0) = z.$$

zu b) Es genügt zu zeigen, daß für alle $s_0 \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\psi^{-1}((-\infty, s_0]) \text{ abgeschlossen ist (Bauer [2], 9.1).}$$

Sei $(z_n) \subset \psi^{-1}((-\infty, s_0])$, $z_n \rightarrow z$. Wegen der Kompaktheit

von Γ_0 existiert eine Teilfolge (z_{n_j}) , so daß $(\psi(z_{n_j}))_j$ konvergiert. Es gilt $s' := \lim \psi(z_{n_j}) \leq s_0$,

$\varphi(s') = \lim \varphi \circ \psi(z_{n_j}) = \lim z_{n_j} = z$; nach der Definition von ψ gilt also $\psi(z) \leq s' \leq s_0$.

Wir setzen die Funktionen $\text{pr}_j \circ \varphi \in C(\Gamma_0; \mathbb{R})$ fort zu beschränkten Funktionen $\varphi_j \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ($j \in \mathbb{N}$).

Mit $S := \psi(T)$ (vgl. Funktionalkalkül 2.16) gilt

$$\varphi_j(S) = \varphi_j \circ \psi(T) = \text{pr}_j \circ \varphi \circ \psi(T) = \text{pr}_j(T) = T_j \quad (j \in \mathbb{N}),$$

nach Folgerung 2.17.

4.4 Hilfssatz.

Sei H ein Hilbertraum, $T, T' \in B(H)$ selbstadjungierte Operatoren, $T' - T$ kompakt, $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

Dann ist $\varphi(T') - \varphi(T)$ kompakt.

Beweis. (vgl. Halmos [17], p.131). Wegen

$$T'^k - T^k = \sum (T^j (T' - T) T'^{k-1-j} ; j = 0, \dots, k-1)$$

folgt die Behauptung, falls φ ein Polynom ist. Für $\varphi \in C(\mathbb{R})$ zeigt man die Aussage mittels gleichmäßiger Approximation von φ auf einer geeigneten kompakten Menge durch Polynome.

4.5 Hilfssatz.

Sei H ein Hilbertraum, $T, T_1, T_2, \dots \in B(H)$ selbstadjungierte Operatoren, $\|T - T_n\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$, $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

Dann gilt $\|\varphi(T) - \varphi(T_n)\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$.

Beweis (vgl. Sz.-Nagy [32], IX.3). Wie im Beweis von Hilfssatz 4.4 folgt die Behauptung, falls φ ein Polynom ist. Sei $M := \sup \{\|T_n\| ; n \in \mathbb{N}\}$ (es gilt $M < \infty$),

(φ_k) eine Folge von Polynomen mit

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{\infty} := \max \{ |\varphi_k(s) - \varphi(s)| ; -M \leq s \leq M \} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi(T) - \varphi(T_n)\| &\leq \|\varphi(T) - \varphi_k(T)\| + \|\varphi_k(T) - \varphi_k(T_n)\| + \|\varphi_k(T_n) - \varphi(T_n)\| \\ &\leq 2\|\varphi_k - \varphi\|_{\infty} + \|\varphi_k(T) - \varphi_k(T_n)\| \rightarrow 2\|\varphi_k - \varphi\|_{\infty} \ (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Da dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung.

Beweis von Satz 4.1. (i) Wir setzen zunächst voraus

$T \in B(H)$. Nach Hilfssatz 4.2 existieren ein selbstadjungierter Operator $S \in B(H)$ und Funktionen $\varphi_j \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, so daß gilt $T_j = \varphi_j(S)$ ($j \in \mathbb{N}$). Nach Satz 3.1, angewendet mit $m=1$, $p=\infty$, $\varepsilon=n^{-1}$, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein selbstadjungierter Operator $K^{(n)} \in \mathcal{C}_{\infty}$, $\|K^{(n)}\| \leq n^{-1}$, so

daß $D^{(n)} := S + K^{(n)}$ diagonal ist.

Dann ist $D_j^{(n)} := \varphi_j(D^{(n)})$ selbstadjungiert ($j \in \mathbb{N}$) und $(D_j^{(n)}; j \in \mathbb{N})$ diagonal; nach Hilfssatz 4.4 ist

$D_j^{(n)} - T_j = \varphi_j(D^{(n)}) - \varphi_j(S)$ kompakt ($j \in \mathbb{N}$); außerdem gilt nach Hilfssatz 4.5

$$\|D_j^{(n)} - T_j\| = \|\varphi_j(D^{(n)}) - \varphi_j(S)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Durch genügend hohe Wahl von n kann also zusätzlich

$$\|D_j^{(n)} - T_j\| \leq \varepsilon \quad \text{für endlich viele } j \text{ erreicht werden.}$$

(ii) Für den allgemeinen Fall zerlegen wir gemäß Satz 2.11

$H = \bigoplus (H_k; k \in \mathbb{N})$, wo H_k reduzierender Teilraum von T ist mit $T_{H_k} \subset B(H_k)$ ($k \in \mathbb{N}$).

Auf H_k , $(T_j^{(k)}; j \in \mathbb{N}) := T_{H_k}$ treffen also die Voraus-

setzungen von Teil (i) des Beweises zu; es gibt daher

selbstadjungierte Operatoren $D_j^{(k)} \in B(H_k)$, $(D_j^{(k)}; j \in \mathbb{N})$ gemeinsam diagonal, mit $K_j^{(k)} := D_j^{(k)} - T_j^{(k)} \in c_\infty$ ($j \in \mathbb{N}$) und $\|K_j^{(k)}\| \leq \varepsilon \cdot 2^{-k}$ für $j = 1, 2, \dots, m+k$.

Es ist klar, daß die Operatoren $D_j := \bigoplus (D_j^{(k)}; k \in \mathbb{N})$

selbstadjungiert sind ($j \in \mathbb{N}$) und daß $(D_j; j \in \mathbb{N})$

diagonal ist.

Außerdem gilt für $j \in \mathbb{N}$

$$K_j = D_j - T_j = \bigoplus (K_j^{(k)}; k \in \mathbb{N}),$$

$$\begin{aligned} \sum (\|K_j^{(k)}\|; k \in \mathbb{N}) &= \sum (\|K_j^{(k)}\|; k \leq j-m-1) + \sum (\|K_j^{(k)}\|; k \geq j-m) \\ &\leq c(j) + \varepsilon \sum (2^{-k}; k \geq \max(j-m, 1)) = c(j)' + \varepsilon, \end{aligned}$$

wo $c(j) = 0$ ist für $j = 1, \dots, m$. Als Summe einer absolut

konvergenten Reihe von kompakten Operatoren ist also K_j

kompakt ($j \in \mathbb{N}$), und die im Satz behaupteten Abschätzungen

gelten.

§ 5 Operatoren mit rein singulärem Spektrum

5.1 Bezeichnung, Bemerkungen.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $0 < p < \infty$, $N \subset \mathbb{R}^m$ definieren wir

$$H_p(N) := \sup_{\varepsilon > 0} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p ; \text{es existiert eine Folge } (W_j) \text{ von achsenparallelen offenen Würfeln mit } N \subset \bigcup W_j, \right. \\ \left. W_j \text{ hat Kantenlänge } s_j \leq \varepsilon (j \in \mathbb{N}) \right\}.$$

H_p heißt äußeres Hausdorff-Maß der Dimension p (vgl.

Hausdorff [18], S.163).

Die folgenden Eigenschaften von H_p sind leicht zu beweisen; a), b), c) besagen, daß H_p ein äußeres Maß (vgl. Bauer [2], 5.3) auf $\mathbb{R}^m$ ist.

a) $H_p(\emptyset) = 0$, $H_p(N) \geq 0$ für alle $N \subset \mathbb{R}^m$;

b) sind $N_1 \subset N_2 \subset \mathbb{R}^m$, so gilt $H_p(N_1) \leq H_p(N_2)$;

c) sind $N_j \subset \mathbb{R}^m$ ($j \in \mathbb{N}$), so gilt

$$H_p(\bigcup (N_j ; j \in \mathbb{N})) \leq \sum (H_p(N_j) ; j \in \mathbb{N});$$

d) ist $N \subset \mathbb{R}^m$ abzählbar, so gilt $H_p(N) = 0$;

e) H_m (d.h. $p=m$) ist das äußere Lebesgue-Maß der Dimension m ; für jede Borel-Menge $B \subset \mathbb{R}^m$ gilt

$$H_m(B) = \lambda^m(B);$$

f) ist $N \subset \mathbb{R}^m$, $H_p(N) < \infty$, so gilt $H_p(N) = 0$ für alle $p > p'$; für $p > m$ gilt $H_p(\mathbb{R}^m) = 0$;

g) nimmt man in der Definition von H_p für die abzählbare Überdeckung statt offener Würfel offene Kugeln (mit Durchmesser s_j) und nennt die so erhaltene Mengenfunktion $H_{p,K}$, so gilt $H_p \leq H_{p,K} \leq m^{p/2} H_p$ (ein Würfel der Kantenlänge s enthält eine Kugel des Durchmessers s und ist in einer Kugel vom Durchmesser $m^{1/2} \cdot s$ enthalten);

h) ist $N \subset \mathbb{R}^m$, $H_p(N) = 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$,

$\varphi: N \rightarrow \mathbb{R}^m$ Hölder-stetig mit Hölder-Exponent α ,
 so gilt $H_{p/\alpha}(\varphi(N)) = 0$ (Ist nämlich c die Hölder-Konstante von φ , dann also $|\varphi(z) - \varphi(\eta)| \leq c|z - \eta|^\alpha$
 $(z, \eta \in N)$, so gilt $\text{diam}(\varphi(K \cap N)) \leq c \cdot s^\alpha$ für jede Kugel
 K mit Durchmesser s , $\varphi(K \cap N)$ liegt also in einer Kugel
 vom Durchmesser $2c \cdot s^\alpha$; mit g) folgt die Behauptung).

5.2 Satz.

Sei H ein separabler Hilbertraum, T ein selbstadjungierter Operator in H , E sein Spektralmaß.

Es existiere $0 < p \leq 1$ und eine Borel-Menge $\Sigma \subset \mathbb{R}$ mit $H_p(\Sigma) = 0$, $E(\Sigma) = I$ (d.h. das Spektralmaß von T wird von der Menge Σ getragen).

Sei $\varepsilon > 0$.

Dann existiert ein selbstadjungierter Operator $K \in \mathcal{C}_p$,
 $\|K\|_p \leq \varepsilon$, so daß $T+K$ diagonal ist.

5.3 Bemerkungen. a) Im Beweis verwenden wir die von Neumann'sche Beweisidee des Satzes von Weyl - von Neumann, vgl. z.B. Kato [21], X-§2.1. Jedoch sind einige zusätzliche Überlegungen nötig.

b) Sind für einen Operator die Voraussetzungen von Satz 5.2 erfüllt, so sind sie wegen Bemerkung 5.1,f insbesondere mit $p=1$ erfüllt. Letzteres ist aber für einen Operator T in einem separablen Hilbertraum äquivalent dazu, daß der absolut stetige Teilraum H_{ac} von T (vgl. Definition 8.1) trivial ist. (Daß die erstgenannte Bedingung hinreichend ist, ist klar mit Definition 8.1. Um die Notwendigkeit einzusehen, nimmt man eine Spektraldarstellung $J: \bigoplus (L_2(\mathbb{R}, \mu_\alpha); \alpha \in A) \rightarrow H$, $A \subset \mathbb{N}$ von T (vgl. Satz 2.11); aus Definition 8.1 und Satz 2.13 folgt, daß alle Maße μ_α

λ^1 -singulär sind; für $\alpha \in A$ gibt es daher eine λ^1 -Nullmenge N_α , die das Maß μ_α trägt; aus Funktionalalkül 2.16, f folgt, daß die λ^1 -Nullmenge $\bigcup_\alpha N_\alpha$ das Spektralmaß von T trägt.) Ein solcher Operator heißt (spektral) singulär (Kato [21], X-§1.2) oder Operator mit rein singulärem Spektrum.

Für diesen Fall $p=1$ ist Satz 5.2 von Carey und Pincus (vgl. Carey - Pincus [9]) bewiesen worden.

c) Man kennt immer eine minimale abgeschlossene Menge, die das Spektralmaß von T trägt, nämlich das Spektrum $\sigma(T)$ von T . Wir können daher immer $\sum \subset \sigma(T)$ wählen. Jedoch ist im allgemeinen die Wahl $\sum = \sigma(T)$ nicht optimal: Sei $(r_j) \subset [0,1]$ eine in $[0,1]$ dichte Folge, T ein diagonal Operator in einem separablen Hilbertraum, der die Eigenwerte r_j hat. Für diesen ist $\sigma(T) = [0,1]$, $H_1(\sigma(T)) = 1$, $H_p(\sigma(T)) = \infty$ für $0 < p < 1$ (vgl. Bemerkung 5.1, e und f). Mit der Wahl $\sum = \sigma(T)$ könnte also in diesem Fall aus Satz 5.2 nichts gefolgert werden. Jedoch kann hier $\sum$ wesentlich günstiger gewählt werden, nämlich $\sum = \{r_j; j \in \mathbb{N}\}$; dann gilt $H_p(\sum) = 0$ für alle $p \in (0,1]$. Natürlich braucht in diesem Beispiel Satz 5.2 gar nicht mehr angewendet zu werden, da ja T schon diagonal ist; immerhin zeigt dieses Beispiel, warum es sinnvoll ist, in Satz 5.2 nicht mit $\sigma(T)$ selbst, sondern mit einer das Spektralmaß von T tragenden Teilmenge $\sum$ zu arbeiten.

5.4 Hilfssatz.

Die Voraussetzungen von Satz 5.2 seien erfüllt, außerdem sei $T \in B(H)$ und $\sum$ kompakt.

Sei $y \in H$, $\delta > 0$.

Dann existieren ein abgeschlossener Teilraum $G \subset H$ und ein selbstadjungierter Operator $K \in c_p$, so daß gilt:

a) $y \in G$;

b) G reduziert $T + K$, $(T+K)_G$ ist diagonal;

c) $\|K\|_p \leq \delta$.

Beweis. Wegen $H_p(\Sigma) = 0$ existieren offene Intervalle

$I_1, I_2, \dots$, so daß gilt $\Sigma \subset \bigcup I_k$, $\sum \chi^1(I_k)^p \leq \frac{1}{2} \delta^p$.

Da Σ kompakt ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\Sigma \subset \bigcup (I_k; k=1, \dots, n)$.

Wir disjunktisieren $I_1, \dots, I_n$:

$I'_k := I_k \setminus \bigcup (I_j; j=1, \dots, k-1)$ ($k=1, \dots, n$).

Sei $y_k := E(I'_k) y$ ($k=1, \dots, n$); ohne Einschränkung nehmen

wir an $y_k \neq 0$ ($k=1, \dots, n$) (nach Umindizieren und Verkleinern von n).

Sei $z_k := \|y_k\|^{-1} y_k$ ($k=1, \dots, n$),

$G := L\{y_k; k=1, \dots, n\}$ (" $L\{\dots\}$ " lineare Hülle von $\{\dots\}$;

es gilt $y \in G$; $(z_1, \dots, z_n)$ ist eine Orthonormalbasis von G);

P sei die orthogonale Projektion auf G .

Wir definieren $K' := -(I-P)TP$,

$K := K' + K'^* = -(I-P)TP - PT(I-P)$.

Dann verifiziert man $T+K = (I-P)T(I-P) + PTP$;

also ist G reduzierender Teilraum von $T+K$;

$(T+K)_G = PTP = \sum (\langle z_k | T z_k \rangle \cdot \langle z_k | \cdot \rangle z_k; k=1, \dots, n)$

zeigt, daß $(T+K)_G$ diagonal ist.

Um c) zu zeigen, benutzen wir die Gleichung

$\|K\|_p^p = \inf \left\{ \sum (\|K \varphi_k\|_p^p; k \in \mathbb{N}) ; (\varphi_n) \text{ Orthonormalbasis von } H \right\}$

(vgl. McCarthy [24], Lemma 2.2), die für $0 < p \leq 2$ gilt.

Wir ergänzen $(z_1, \dots, z_n)$ zu einer Orthonormalbasis (z_k)

von H und erhalten

$\|K'\|_p^p \leq \sum (\|K' z_k\|_p^p; k=1, \dots, n)$ wegen $K' z_k = 0$ für $k > n$.

Zusammen mit

$$\begin{aligned} \|K' z_k\|^2 &= \|(I-P)T z_k\|^2 = \|T z_k - \langle z_k | T z_k \rangle z_k\|^2 = \\ &= \int_{I'_k} (t - \langle z_k | T z_k \rangle)^2 d\langle z_k | E(t) z_k \rangle \leq \chi^1(I_k)^2 \end{aligned}$$

ergibt dies $\|K'\|_p^p \leq \sum (\|K' z_k\|_p^p; k=1, \dots, n) \leq \sum \chi^1(I_k)^p \leq \frac{\delta^p}{2}$,

$\|K\|_p^p \leq \|K'\|_p^p + \|K'^*\|_p^p = 2 \|K'\|_p^p \leq \delta^p$.

Beweis von Satz 5.2. In (i) beweisen wir Satz 5.2 unter zusätzlichen Voraussetzungen; in (ii) und (iii) zeigen wir, daß wir den allgemeinen Fall auf diesen speziellen zurückführen können.

(i) Außer den Voraussetzungen des Satzes gelte $T \in B(H)$, und Σ sei kompakt. Aus Σ kompakt, $E(\Sigma) = I$ folgt $\sigma(T) \subset \Sigma$. Wegen Bemerkung 5.3,c können wir daher ohne Einschränkung annehmen $\Sigma = \sigma(T)$.

(x_n) sei eine dichte Folge in H .

Wir definieren induktiv eine Folge $(y_j) \subset H$, eine Folge (G_j) von paarweise orthogonalen abgeschlossenen Teilräumen von H mit $y_j \in G_j$ ($j \in \mathbb{N}$), $H = \bigoplus (G_j; j \in \mathbb{N})$, und eine Folge (K_j) von selbstadjungierten Operatoren mit $\|K_j\|_p^p \leq 2^{-j} \cdot \epsilon^p$, so daß für $k \in \mathbb{N}$ der Operator $T_k := T + K_1 + \dots + K_k$ von $\bigoplus (G_j; j = 1, \dots, k)$ reduziert wird, $(T_k)_{\bigoplus (G_j; j = 1, \dots, k)}$ diagonal und $K_k|_{\bigoplus (G_j; j = 1, \dots, k-1)} = 0$ ist.

Wir gewinnen G_1, K_1 , indem wir Hilfssatz 5.4 anwenden auf $T, \Sigma = \sigma(T), y_1 = x_1, \delta = 2^{-1/p} \cdot \epsilon$.

Seien y_j, G_j, K_j definiert für $j = 1, \dots, k-1$.

Wir wählen $n_0 := \min \{n; x_n \notin \bigoplus (G_j; j = 1, \dots, k-1)\}$, $y_k :=$ Orthogonalprojektion von x_{n_0} auf $(\bigoplus (G_j; j = 1, \dots, k-1))^\perp$.

(Ist $\{n; x_n \notin \bigoplus (G_j; j = 1, \dots, k-1)\} = \emptyset$, so ist

$H = \bigoplus (G_j; j = 1, \dots, k-1)$, und die weiteren Schritte sind überflüssig.)

Wir wollen Hilfssatz 5.4 auf

$\hat{T}_{k-1} := (T_{k-1})_{(\bigoplus (G_j; j = 1, \dots, k-1))^\perp}, y_k, \Sigma = \sigma(\hat{T}_{k-1}),$

$\mathcal{J} = 2^{-p \cdot k} \cdot \epsilon$ anwenden. Dazu haben wir nur noch

$$H_p(\mathcal{S}(\hat{T}_{k-1})) = 0 \text{ nachzuweisen.}$$

Zunächst bemerken wir $\mathcal{S}(\hat{T}_{k-1}) \subset \mathcal{S}(T_{k-1})$.

Da $K_1, \dots, K_{k-1}$ kompakt sind, gilt $\mathcal{S}_w(T_{k-1}) = \mathcal{S}_w(T)$ (Satz von H. Weyl, vgl. Kato [21], IV-5.35; " $\mathcal{S}_w$ " wesentliches Spektrum). Außerdem ist $\mathcal{S}(T_{k-1}) \setminus \mathcal{S}_w(T_{k-1})$ abzählbar.

Unter Verwendung der Eigenschaften 5.1, b, c) und d) erhalten wir damit

$$\begin{aligned} H_p(\mathcal{S}(\hat{T}_{k-1})) &\leq H_p(\mathcal{S}(T_{k-1})) \\ &\leq H_p(\mathcal{S}(T_{k-1}) \setminus \mathcal{S}_w(T_{k-1})) + H_p(\mathcal{S}_w(T_{k-1})) \\ &= 0 + H_p(\mathcal{S}_w(T)) \leq H_p(\mathcal{S}(T)) = 0. \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 5.4 erhalten wir einen abgeschlossenen

Teilraum $G_k \subset (\bigoplus (G_j; j=1, \dots, k-1))^\perp$ mit $y_k \in G_k$ und

einen Operator $\hat{K}_k \in c_p((\bigoplus (G_j; j=1, \dots, k-1))^\perp)$,

$\|\hat{K}_k\|_p^p \leq 2^{-k} \cdot \epsilon^p$, aus dem wir durch

$K_k := \hat{K}_k \oplus 0_{\bigoplus (G_j; j=1, \dots, k-1)}$ einen Operator $K_k \in c_p(H)$,

$\|K_k\|_p = \|\hat{K}_k\|_p$ erhalten.

Diese Konstruktion ergibt Folgen (y_j) , (G_j) , (K_j) mit den genannten Eigenschaften.

Die Konstruktion ergibt die Abschätzung

$$\sum (\|K_j\|_p^p; j \in \mathbb{N}) \leq \epsilon^p \sum 2^{-j} = \epsilon^p.$$

Mit der Translationsinvarianz der Metrik

$c_p \times c_p \ni (K', K'') \mapsto \|K' - K''\|_p^p$ und der Vollständigkeit von

c_p in dieser Metrik (vgl. §1, c) folgen aus der "absoluten

Konvergenz" $\sum \|K_j\|_p^p \leq \epsilon^p < \infty$ die Konvergenz der Reihe

$K := \sum (K_j; j \in \mathbb{N})$ in c_p und die Abschätzung $\|K\|_p^p \leq \epsilon^p$

genauso, wie in Banachräumen aus der absoluten Konvergenz

die Konvergenz einer Reihe folgt.

Wegen $\|\cdot\|_p \geq \|\cdot\|_\infty$ konvergiert $\sum (K_j; j \in \mathbb{N})$ auch in der Operatornorm, daher konvergiert

$T_K = T + K_1 + \dots + K_k \rightarrow T + K$ in der Operatornorm.

Nach Konstruktion ist für $j \geq k$

$(T_k)_{G_k} = (T_j)_{G_k} = (T + K)_{G_k}$ diagonal; da dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist $T + K$ diagonal.

(ii) Wir zeigen, daß H als abzählbare orthogonale Summe $H = \oplus (H_j; j \in \mathbb{N})$ dargestellt werden kann mit den Operator T reduzierenden Teilräumen H_j , so daß $T_j := T|_{H_j}$ die Voraussetzungen von (i) erfüllen ($j \in \mathbb{N}$).

Nach Satz 2.11 existieren eine Folge (μ_n) von endlichen Borel-Maßen auf $\mathbb{R}$ und eine unitäre Abbildung

$J: \oplus (L_2(\mathbb{R}, \mu_n); n \in \mathbb{N}) \rightarrow H$, so daß $TJ = JM_{\text{id}}$ ist.

Ohne Einschränkung nehmen wir im folgenden an, daß

$H = \oplus (L_2(\mathbb{R}, \mu_n); n \in \mathbb{N})$ und $J = I$ ist.

$E(\Sigma) = I$ bedeutet gerade $M_{\chi_\Sigma} = I$ in $L_2(\mathbb{R}, \mu_n)$, d.h.

$\mu_n(\mathbb{R} \setminus \Sigma) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) (vgl. Funktionalkalkül 2.16, d).

Da μ_n regulär (insbesondere von innen) ist, gibt es eine disjunkte Folge $(\Sigma_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ von kompakten Mengen $\Sigma_k^{(n)} \subset \Sigma$, so daß $\mu_n(\Sigma \setminus \bigcup (\Sigma_k^{(n)}; k \in \mathbb{N})) = 0$ ist ($n \in \mathbb{N}$).

Daher gilt mit $\mu_{n,k} := \mu_n|_{\Sigma_k^{(n)}}$

$L_2(\mathbb{R}, \mu_n) = L_2(\Sigma, \mu_n) = \oplus (L_2(\Sigma_k^{(n)}, \mu_{n,k}); k \in \mathbb{N})$.

Für den Operator

$T_k^{(n)} := (T)|_{L_2(\Sigma_k^{(n)}, \mu_{n,k})} = M_{\text{id}}$ in $H_k^{(n)} := L_2(\Sigma_k^{(n)}, \mu_{n,k})$

gilt $T_k^{(n)} \in B(H_k^{(n)})$, $\sigma(T_k^{(n)}) \subset \Sigma_k^{(n)}$ wegen der Kompaktheit von $\Sigma_k^{(n)}$ und $H_p(\sigma(T_k^{(n)})) \leq H_p(\Sigma_k^{(n)}) \leq H_p(\Sigma) = 0$.

Die orthogonale Zerlegung

$$\bigoplus (L_2(\sum_k^{(n)} \mu_{n,k}); k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}) = \bigoplus (L_2(\mathbb{R}, \mu_n); n \in \mathbb{N}) = H$$

hat daher die am Anfang von (ii) behaupteten Eigenschaften.

(iii) Wir verwenden die in (ii) gewonnene Zerlegung $H = \bigoplus (H_j; j \in \mathbb{N})$.

Wir wählen $\varepsilon_j := \varepsilon^p \cdot 2^{-j/p}$. Da $T_j := T_{H_j}$ die Voraussetzungen von (i) erfüllt, gibt es einen selbstadjungierten Operator $K_j \in c_p(H_j)$, $\|K_j\|_p \leq \varepsilon_j$, so daß $T_j + K_j$ ein diagonaler Operator in H_j ist ($j \in \mathbb{N}$).

Für $K := \bigoplus (K_j; j \in \mathbb{N})$ gilt nach §1,c

$$\|K\|_p^p = \sum (\|K_j\|_p^p; j \in \mathbb{N}) \leq \varepsilon^p \cdot \sum (2^{-j}; j \in \mathbb{N}) = \varepsilon^p,$$

und $T + K = \bigoplus (T_j + K_j; j \in \mathbb{N})$ ist ein diagonaler Operator in H .

§ 6 Bemerkungen und Beispiele zu §3 und §5

6.1 Bemerkung. Bei einem Vergleich der Voraussetzungen von Satz 3.1 und Satz 5.2 bemerkt man, daß in Satz 3.1 die "fehlende" Voraussetzung "das Spektralmaß von $T = (T_1, \dots, T_m)$ werde von einer Menge Σ mit $H_p(\Sigma) = 0$ getragen" immer erfüllt ist. In Satz 3.1 ist nämlich $p > m$ vorausgesetzt; nach Bemerkung 5.1,f gilt dann $H_p(\Sigma) = 0$ mit $\Sigma = \mathbb{R}^m$, was wir in diesem Fall immer wählen können. Für den Fall, daß das gemeinsame Spektralmaß von $(T_1, \dots, T_m)$ "gut verschmiert" ist, d.h. daß man nicht Σ mit $H_m(\Sigma) = 0$ und $E(\Sigma) = I$ wählen kann, werden wir in §8 zeigen (für den Fall $m \geq 3$), daß in Satz 3.1 nicht $p < m$ erreicht werden kann. Man wird vermuten, daß weniger starke Störungen $K_1, \dots, K_m$ schon groß genug sind, falls das gemeinsame Spektralmaß "weniger verschmiert" ist.

Wir werden diese Vermutung zunächst genauer formulieren und dann an Beispielen zeigen, daß sie in Spezialfällen bewiesen werden kann.

6.2 Vermutung. Sei H ein separabler Hilbertraum, $m \in \mathbb{N}$, $T = (T_1, \dots, T_m)$ ein kommutatives m -Tupel von selbstadjungierten Operatoren in H , E das Spektralmaß von T .

Sei $0 < p \leq m$; es existiere eine Borel-Menge $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$, so daß gilt $H_p(\Sigma) = 0$, $E(\Sigma) = I$.

Dann gibt es selbstadjungierte Operatoren $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{C}_p$, so daß $(T_j + K_j; j = 1, \dots, m)$ diagonal ist ??

6.3 Bemerkung. Wir haben keinen Beweis für Vermutung 6.2 gefunden. Die Technik des Beweises von Satz 3.1, die gemeinsame Orthonormalbasis direkt zu konstruieren, ist zu grob, da die Menge Σ ziemlich unkontrollierbar in $\mathbb{R}^m$ liegen kann. Der Beweis von Satz 5.2 wiederum benutzt wesentlich, daß die Summe von zwei beschränkten selbstadjungierten Operatoren wieder selbstadjungiert ist. Wollte man diese Beweismethode naiv übertragen, so brauchte man: "Sind $T_1, \dots, T_m$ vertauschbar, selbstadjungiert, $K_1, \dots, K_m$ selbstadjungiert, so sind $T_1 + K_1, \dots, T_m + K_m$ vertauschbar", eine Aussage, die offensichtlich falsch ist.

6.4 Satz.

Sei H ein separabler Hilbertraum, $m \in \mathbb{N}$,

$T = (T_1, \dots, T_m) \subset B(H)$ ein kommutatives m -Tupel von selbstadjungierten Operatoren, E das Spektralmaß von T .

Sei Γ_0 das Cantor'sche Diskontinuum, $p_0 := \frac{\log 2}{\log 3}$ (vgl. Bemerkung 6.5).

Sei $0 < \alpha \leq 1$; es existiere eine Hölder-stetige Abbildung $\varphi: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Hölder-Exponent α , so daß gilt

$$E(\varphi(\Gamma_0)) = I.$$

Sei $\epsilon > 0$, $p > p_0/\alpha$ (vgl. Bemerkung 6.5,a).

Dann existieren selbstadjungierte Operatoren $K_1, \dots, K_m \in C_p$,
 $\|K_j\|_p \leq \epsilon$ ($j = 1, \dots, m$), so daß das m -Tupel
 $(T_j + K_j; j = 1, \dots, m)$ diagonal ist, mit gemeinsamen Eigen-
 werten in $\varphi(\Gamma_0)$.

6.5 Bemerkungen. a) Aus b) wird folgen $H_p(\Gamma_0) = 0$ für
 $p' > p_0 = \frac{\log 2}{\log 3}$. Mit Bemerkung 5.1,h folgt aus den Voraus-
 setzungen von Satz 6.4 $H_p(\varphi(\Gamma_0)) = 0$ für $p > p_0/\alpha$.

b) Das Cantor'sche Diskontinuum Γ_0 gewinnt man wie folgt.
 Im 1. Schritt entfernt man aus dem Intervall $[0,1]$ das
 offene mittlere Drittel und erhält 2 abgeschlossene
 Intervalle der Länge 3^{-1} .

Im n -ten Schritt entfernt man aus den 2^{n-1} im
 $(n-1)$ -ten Schritt erhaltenen Intervallen der Länge
 $3^{-(n-1)}$ jeweils das offene mittlere Drittel und erhält
 2^n abgeschlossene Intervalle der Länge 3^{-n} .

Γ_0 ist das Komplement (in $[0,1]$) der Vereinigung aller
 herausgenommenen mittleren Drittel.

Wir bezeichnen mit G_n^0 ($n \in \mathbb{N}$) diejenige Partition von Γ_0 ,
 die entsteht, wenn man die einzelnen im n -ten Schritt
 erhaltenen Intervalle mit Γ_0 schneidet; $G_0^0 := \{[0,1]\}$;
 G_n^0 besteht aus 2^n paarweise disjunkten Teilmengen von
 Γ_0 des Durchmessers 3^{-n} ; jede Menge $\Delta \in G_n^0$ ist disjunkte
 Vereinigung von zwei Elementen von G_{n+1}^0 .

Mit $p_0 = \frac{\log 2}{\log 3}$ gilt $H_{p_0}(\Gamma_0) = 1$ (vgl. Hausdorff [18],
 S.168 - 172, insbesondere S.172,Mitte für p_0).

Aus dem äußeren Maß $H_{p_0}|_{\Gamma_0}$ gewinnt man mit der Konstruktion von Carathéodory ein Maß auf einer σ -Algebra, die die Borel-Mengen von Γ_0 enthält (vgl. Bauer [2], I, 5.2, 5.4, 5.5). Dieses Maß stimmt mit dem Maß überein, das im allgemeinen auf Γ_0 betrachtet wird (vgl. Hausdorff [18], S. 173 - 175, Zygmund [36], V.3). Dieses ist eindeutig bestimmt durch die Forderung, daß jedes Element von G_n^0 das Maß 2^{-n} haben soll.

Der Beweis von Satz 6.4 verläuft ganz analog zu dem von Satz 3.1; wir werden daher nur einige in den Schritten (i) und (ii) anzubringende Modifikationen angeben.

Sei c der Hölder-Koeffizient von φ , d.h.

$|\varphi(t) - \varphi(t')| \leq c |t - t'|^\alpha \quad (t, t' \in \Gamma_0)$. Für Γ_0 verwenden wir die in Bemerkung 6.5, b eingeführten Bezeichnungen.

Sei $n' \in \mathbb{N}_0$, $\Gamma \in G_{n'}^0$.

Sei $\Gamma' \subset \varphi(\Gamma)$ eine Borel-Menge. Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei G_i eine Menge von Borel'schen Teilmengen von Γ' , die durch Disjunktisieren aus dem Mengensystem

$\{\Gamma' \cap \varphi(\Delta); \Delta \in G_{n'+i}^0, \Delta \subset \Gamma\}$ hervorgeht. Diese Disjunktisierungen können so gewählt werden, daß jede Menge aus G_i Vereinigung von genau zwei Mengen aus G_{i+1} ist. Jedem Element $\Delta \in G_{n'+i}^0$ ist genau ein Element $\Delta' \in G_i$ zugeordnet; für dieses gilt $\Delta' \subset \varphi(\Delta)$; für $z, z' \in \Delta'$ gibt es $t, t' \in \Delta$ mit $z = \varphi(t)$, $z' = \varphi(t')$, woraus folgt

$$|z - z'| = |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq c |t - t'|^\alpha = c 2^{-(n'+i)\alpha}.$$

Sei μ ein endliches Borel-Maß auf $\mathbb{R}^m$, das von Γ' getragen wird (d.h. $\mu(\mathbb{R}^m \setminus \Gamma') = 0$). Mit den hier angegebenen Partitionen G_i von Γ' gewinnen wir eine Ortho-

normalfolge $(\varphi_{\Delta',k}; k=1,\dots,k_{\Delta'}, \Delta' \in G_i, i \in \mathbb{N}_0)$ in $L_2(\Gamma', \mu) (= L_2(\mathbb{R}^m, \mu))$ wie in Teil (i) des Beweises von Satz 3.1.

Weiterhin wählen wir $z_{\Delta'} \in \Delta' (\Delta' \in G_i, i \in \mathbb{N}_0)$.

Zum Beweis, daß die obige Orthonormalfolge eine Orthonormalbasis ist, sei $\psi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ (ψ stetig mit kompaktem Träger); dann ist ψ gleichmäßig stetig. Die durch

$$\psi_1(z) := \begin{cases} 0 & \text{für } z \in \mathbb{R}^m \setminus \Gamma', \\ \psi(z_{\Delta'}) & \text{für } z \in \Delta' (\Delta' \in G_i) \end{cases}$$

definierte Funktion ψ_1 ist Element des von obiger Orthonormalfolge erzeugten Teilraumes von $L_2(\mathbb{R}^m, \mu)$; außerdem konvergiert $\psi_1 \rightarrow \psi$ gleichmäßig auf Γ' , da $\max\{\text{diam } \Delta'; \Delta' \in G_i\} \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$. Daher konvergiert $\psi_1 \rightarrow \psi$ in $L_2(\mathbb{R}^m, \mu)$; der von der Orthonormalfolge erzeugte abgeschlossene Teilraum enthält $C_0(\mathbb{R}^m)$, ist also $L_2(\mathbb{R}^m, \mu)$ (Bauer [2], 43.5).

Die Operatoren $D_j (j=1,\dots,m)$ definieren wir wie in Teil (i) des Beweises von Satz 3.1.

Die Abschätzungen am Ende dieses Beweisteiles ergeben dann (wir geben diese nur für den Fall $p \geq 1$; für $p \leq 1$ hat man statt der Dreiecksungleichung der Norm $\|\cdot\|_p (p \geq 1)$ die der Metrik $\|\cdot\|_p (p \leq 1)$ zu verwenden, vgl. §5)

$$\begin{aligned} & \left\| \sum (\langle z_{\Delta',j} - p r_j | \varphi_{\Delta',k} \rangle \varphi_{\Delta',k} ; \Delta' \in G_i) \right\|_p^p \\ &= \sum (\|\varphi_{\Delta',k}\| \|\langle z_{\Delta',j} - p r_j | \varphi_{\Delta',k} \rangle\|)^p ; \Delta' \in G_i) \\ &= \sum (c \cdot 3^{-(n'+1)\alpha})^p ; \Delta' \in G_i) \\ &= 2^{i \cdot c \cdot p} \cdot 3^{-n' \cdot \alpha \cdot p} \cdot 3^{i(p_0 - \alpha p)} \cdot 3^{-p_0 \cdot i} \\ &= c^{p \cdot 3^{-\alpha n' \cdot p} \cdot 3^{(p_0 - \alpha p)i}} \quad (\text{man beachte } 3^{p_0} = 3^{\frac{\log 2}{\log 3}} = 2), \end{aligned}$$

$$\|K_{ji}\|_p \leq \sum (\| \sum_{\Delta \in G_i} \dots \|_p ; k=1,2) \leq 2c 3^{-\alpha n'} \cdot 3^{(\frac{p_0}{p} - \alpha) \cdot i}$$

$$\|K_j\|_p \leq \sum (\|K_{ji}\|_p ; i \in \mathbb{N}_0) \leq 3^{-\alpha n'} \cdot 2c \sum_{i=0}^{\infty} 3^{(\frac{p_0}{p} - \alpha) i} \\ = 3^{-\alpha n'} c(p) ,$$

$$\text{wo } c(p) := 2c \sum_{i=0}^{\infty} 3^{(\frac{p_0}{p} - \alpha) i} < \infty \text{ ist wegen } \frac{p_0}{\alpha} < p, \\ \frac{p_0}{p} - \alpha < 0.$$

Bei dem Schritt, der Teil (ii) des Beweises von Satz 3.1 entspricht, geht man von einem Borel-Maß μ auf $\varphi(\Gamma_0)$ aus. Man wählt $n \in \mathbb{N}$, disjunktisiert das aus

$G_n^0 = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2^n})$ entstehende Mengensystem

$(\varphi(\Gamma_1), \dots, \varphi(\Gamma_{2^n}))$ zu

$(\Gamma_1', \dots, \Gamma_{2^n}') , \text{ mit } \Gamma_q' \subset \varphi(\Gamma_q) \ (q=1, \dots, 2^n) \text{ und findet}$

zu jedem Γ_q' , $\mu_q := \mu|_{\Gamma_q'}$ wie soeben beschrieben

Operatoren $K_{j,q} \ (j=1, \dots, m)$. Aus $\|K_{j,q}\|_p \leq 3^{-\alpha n} \cdot c(p)$ folgt dann die Abschätzung

$$\|K_j\|_p^p = \sum (\|K_{j,q}\|_p^p ; q=1, \dots, 2^n) \leq 2^n 3^{-\alpha p n} c(p)^p \\ = 2^n \cdot 3^{-p_0 n} \cdot 3^{(p_0 - \alpha p) n} \cdot c(p)^p = 3^{(p_0 - \alpha p) n} \cdot c(p)^p ,$$

was wegen $p_0 - \alpha p < 0$ beliebig klein gemacht werden kann durch genügend hohe Wahl von n .

6.6 Folgerungen aus Satz 6.4.

a) Zunächst bemerken wir, daß Satz 3.1 aus Satz 6.4 folgt. Dazu genügt es (nach einigen Reduktionen), für $m \in \mathbb{N}$ eine surjektive Hölder-stetige Funktion $\varphi: \Gamma_0 \rightarrow [0, 1]^m$ mit Hölder-Exponent $\alpha = \frac{p_0}{m}$ anzugeben. Dazu verwenden wir die in Bemerkung 6.5, b eingeführten Partitionen G_1^0 von

Γ_0 und die in Teil (i) des Beweises von Satz 3.1 definierten Partitionen G_i von $[0,1]^m$.

Die Anzahl der Elemente von $G_{m,i}^0$ ist $2^{m \cdot i}$, ebenso die von G_i . Wir können bijektive Zuordnungen

$\pi_i: G_{m,i}^0 \rightarrow G_i$ treffen ($i \in \mathbb{N}$), die außerdem die Eigenschaft haben, daß aus $\Delta \in G_{m,i}^0$, $\Delta' \in G_{m(i+1)}^0$, $\Delta' \subset \Delta$ folgt

$$\pi_{i+1}(\Delta') \subset \pi_i(\Delta).$$

Für jedes $\Delta \in G_i$ sei $z_\Delta \in \Delta$ gewählt ($i \in \mathbb{N}$).

Wir definieren eine Folge (φ_i) von Funktionen

$$\varphi_i: \Gamma_0 \rightarrow [0,1]^m \text{ durch}$$

$$\varphi_i(t) := z_{\pi_i(\Delta)} \text{ für } t \in \Delta, \Delta \in G_{m,i}^0.$$

φ_i ist eine Treppenfunktion mit Basismengen in $G_{m,i}^0$, daher stetig. Aus den Eigenschaften der π_i folgt:

Ist $i_0 \in \mathbb{N}$, $\Delta \in G_{m,i_0}^0$, so ist $\varphi_i(t) \in \pi_{i_0}(\Delta)$ für $t \in \Delta$,
 $i \geq i_0$.

Aus dieser Eigenschaft folgert man gleichgradige Stetigkeit der Funktionenfolge (φ_i) sowie gleichmäßige Konvergenz

$$\varphi_i \rightarrow \varphi \text{ gegen eine stetige Funktion } \varphi: \Gamma_0 \rightarrow [0,1]^m.$$

Die Surjektivität von φ erhält man mit Hilfe der Eigenschaft, daß es für jedes $z \in [0,1]^m$ eine Folge $(z_{\Delta_i})_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\Delta_i \in G_i$ gibt, so daß $z_{\Delta_i} \rightarrow z$ gilt.

Seien $t, t' \in \Gamma_0$, $t \neq t'$,

$$i_0 := \min \{i \in \mathbb{N}; \text{ es gibt } \Delta, \Delta' \in G_{m,i}^0, \Delta \neq \Delta', t \in \Delta, t' \in \Delta'\}.$$

Damit liegen t und t' in verschiedenen Mengen von G_{m,i_0}^0 , woraus folgt $|t - t'| \geq 3^{-m \cdot i_0}$,

$$|t - t'|^{p_0/m} \geq 3^{-i_0 p_0} = 2^{-i_0}.$$

Andererseits gibt es eine Menge $\Delta \in G_{m(i_0-1)}^0$ mit $t, t' \in \Delta$; aus der Definition der φ_i folgt $\varphi_i(t), \varphi_i(t') \in \pi_{i_0-1}(\Delta)$

für $i \geq i_0$, $|\varphi_i(t) - \varphi_i(t')| \leq \sqrt{m} \cdot 2^{-(i_0-1)}$ für $i \geq i_0$,

also auch $|\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \sqrt{m} 2^{-(i_0-1)}$.

Damit gilt $|\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \sqrt{m} 2^{-i_0+1} \leq \sqrt{m} 2 |t - t'|^{p_0/m}$.

b) Sei H ein separabler Hilbertraum, $(T_1, \dots, T_m) \subset B(H)$ ein kommutatives m -Tupel von selbstadjungierten Operatoren mit Spektralmaß E .

Sei $n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$, $\psi: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Hölder-stetig mit Hölder-Exponent α , und es gelte $E(\psi([0, 1]^n)) = I$.

Sei $\varepsilon > 0$, $p > \frac{n}{\alpha}$.

Dann existieren selbstadjungierte Operatoren $K_1, \dots, K_m \in c_p$, $\|K_j\|_p \leq \varepsilon$ ($j=1, \dots, m$), so daß $(T_j + K_j; j=1, \dots, m)$ diagonal ist.

Mit der Abbildung $\varphi: \Gamma_0 \rightarrow [0, 1]^n$ aus a) ergibt sich nämlich für die Abbildung $\psi \circ \varphi: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ der Hölder-Exponent $\frac{p_0}{n} \alpha$; Satz 6.4 ergibt dann die Behauptung.

c) Ist H ein separabler Hilbertraum, U ein unitärer Operator in H , so existiert für jedes $p > 1$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein Operator $K \in c_p$, $\|K\|_p \leq \varepsilon$, so daß $U + K$ unitär und diagonal ist.

Dies folgt aus b) mit der C^1 -Abbildung

$$\psi: [0, 1] \rightarrow \{(z_1, z_2); z_1^2 + z_2^2 = 1\},$$

$$\gamma(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

II. Stabilität von absolut stetigen Spektren

§ 7 Wellenoperatoren für unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}^m$

7.1 Voraussetzungen.

Sei H ein Hilbertraum, $m \in \mathbb{N}$. Sei $T = (T_1, \dots, T_m)$ ein kommutatives m -Tupel von selbstadjungierten Operatoren in H , $T' = (T'_1, \dots, T'_m)$ ein weiteres solches m -Tupel. Wir bezeichnen $K_j := T'_j - T_j$ ($j = 1, \dots, m$).

Die zu T gehörenden Bezeichnungen, z.B. $E_T, H_{x,T}$ usw. werden wir im allgemeinen ohne den Index " T " verwenden; für die entsprechenden zu T' gehörenden Bezeichnungen werden wir E', H'_x usw. schreiben.

Bei der Spektraldarstellung von T (bzw. T') können wir in Satz 2.11 ohne Einschränkung $\Gamma = \mathbb{R}^m$ wählen, was wir immer tun wollen. E (bzw. E') sind also Spektralmaße auf $\mathbb{R}^m$.

7.2 Bezeichnungen, Bemerkungen.

a) Sei T wie in den Voraussetzungen 7.1.

Für $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ ist

$$e^{-itT} = e^{-it_1 T_1} \dots e^{-it_m T_m} \quad (tT = \sum (t_j T_j; j=1, \dots, m))$$

mit Hilfe des Funktionalkalküls 2.16 erklärt.

Aus Funktionalkalkül 2.16, a und c) folgt, daß

$\mathbb{R}^m \ni t \mapsto e^{-itT}$ eine unitäre Darstellung von $\mathbb{R}^m$ (unitäre

m -Parameter-Gruppe) ist:

e^{-itT} ist unitär ($t \in \mathbb{R}^m$);

$$e^{-i(t+t')T} = e^{-itT} e^{-it'T} \quad (t, t' \in \mathbb{R}^m);$$

$\mathbb{R}^m \ni t \mapsto e^{-itT}x$ ist stetig ($x \in H$).

Wir sagen, daß die unitäre Darstellung $t \mapsto e^{-itT}$ von T erzeugt wird.

Für $x \in D(T_j)$ gilt $\frac{\partial}{\partial t_j} e^{-itT}x = -iT_j e^{-itT}x$ ($j=1, \dots, m$).

Dies folgt aus Funktionalkalkül 2.16, b wegen

$$\left| \frac{e^{-it_j z_j} - 1}{t_j} \right| \leq |z_j|, \quad \frac{e^{-it_j z_j} - 1}{t_j} \rightarrow z_j \quad (|t_j| \rightarrow 0) \\ \text{für } z_j \in \mathbb{R}.$$

b) Ist $U: \mathbb{R}^m \ni t \mapsto U(t)$ eine unitäre Darstellung von $\mathbb{R}^m$, so gibt es ein kommutatives m -Tupel $T = (T_1, \dots, T_m)$ von selbstadjungierten Operatoren mit $U(t) = e^{-itT}$ ($t \in \mathbb{R}^m$):

Für $s \in \mathbb{R}$ sei $U_j(s) := U(0, \dots, 0, \underset{j}{s}, 0, \dots, 0)$.

Sei T_j definiert durch

$D(T_j) := \{x \in H; \mathbb{R} \ni s \mapsto U_j(s)x \text{ ist differenzierbar bei } s=0\},$

$T_j x := i \cdot \lim (s^{-1}(U_j(s)x - x); s \rightarrow 0) \quad (x \in D(T_j)).$

Dann ist T_j selbstadjungiert und erzeugt die unitäre Ein-Parameter-Gruppe $\mathbb{R} \ni s \mapsto U_j(s)$; vgl. z.B.

Lax-Phillips [23], Appendix 1. Da sich die Resolvente von T_j durch U_j ausdrücken läßt (vgl. Lax-Phillips [23], Appendix 1, Lemma 6), folgt die Vertauschbarkeit von

$T_1, \dots, T_m$, und es gilt

$e^{-itT} = e^{-it_1 T_1} \dots e^{-it_m T_m} = U_1(t_1) \dots U_m(t_m) = U(t)$ für $t \in \mathbb{R}^m$.

c) Sei T wie in den Voraussetzungen 7.1; H' sei ein abgeschlossener Teilraum von H .

H' ist genau dann reduzierender Teilraum von T , wenn H' invariant unter e^{-itT} ist für alle $t \in \mathbb{R}^m$.

Daß die erstgenannte Bedingung hinreichend ist, folgt mit dem Funktionalkalkül 2.16.

Ist andererseits H' invariant unter e^{-itT} ($t \in \mathbb{R}^m$), so auch $H'' := H'^{\perp}$ (vgl. §1, b unter Beachtung von $(e^{-itT})^* = e^{itT}$); H' und H'' reduzieren e^{-itT} ($t \in \mathbb{R}^m$), und mit den erzeugenden m -Tupeln T' von $\mathbb{R}^m \ni t \mapsto (e^{-itT})_{H'}$ und T'' von $\mathbb{R}^m \ni t \mapsto (e^{-itT})_{H''}$ ergibt sich nach b) der Zusammenhang $T_j = T'_j \oplus T''_j$ ($j = 1, \dots, m$).

d) Sei T wie in den Voraussetzungen 7.1; sei $x \in H$.

Dann gilt $H_x = \overline{L\{e^{-itT} x; t \in \mathbb{R}^m\}}$ ($=: H_0$).

Wegen der unitären Abbildung $J_x: L_2(\mathbb{R}^m, \mu_x) \rightarrow H_x$ aus Satz 2.13 erhält man die Inklusion " $\supset$ " unter Beachtung von Funktionalkalkül 2.16, e.

Andererseits ist der abgeschlossene Teilraum H_0 invariant unter e^{-itT} ($t \in \mathbb{R}^m$) und enthält $x = e^{-i0T} x$. Aus c) und Definition 2.12 folgt daher $H_x \subset H_0$.

7.3 Hilfssatz.

Die Voraussetzungen 7.1 seien gegeben. Der abgeschlossene Teilraum H_0 von H reduziere T , P_0 sei die orthogonale Projektion auf H_0 .

Es existiere ein Netz $(t^l)_{l \in J} \subset \mathbb{R}^m$, $|t^l| \rightarrow \infty$, so daß $W^0 := s\text{-}\lim_{l \in J} e^{it^l T'} e^{-it^l T} P_0$ existiert. Dann gilt:

a) W^0 ist partielle Isometrie mit Anfangsbereich H_0 und Endbereich $R(W^0)$.

b) Für alle $t \in \mathbb{R}^m$ existiert

$$W^t := s\text{-}\lim_{l \in J} e^{i(t+t^l)T'} e^{-i(t+t^l)T} P_0 = e^{itT'} W^0 e^{-itT}.$$

Beweis. a) $W^0|_{H_0^\perp} = 0$ ist klar; $W^0|_{H_0}$ ist isometrisch als starker Grenzwert isometrischer Operatoren.

$$\text{b) } e^{i(t+t^l)T'} e^{-i(t+t^l)T} P_0 = e^{itT'} (e^{it^l T'} e^{-it^l T} P_0) e^{-itT} \\ \xrightarrow{t \in J} e^{itT'} W^0 e^{-itT}.$$

7.4 Satz.

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 7.3 seien gegeben, außerdem sei $W^t = W^0$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

$$\text{a) } e^{-itT'} W^0 = W^0 e^{-itT} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}^m;$$

$H_0' := R(W^0)$ ist reduzierender Teilraum von T' .

$$\text{b) } W^{0*} T' W^0 = T P_0;$$

$T_{H_0'}$ und $T'_{H_0'}$ sind unitär äquivalent.

Beweis. a) Wegen Hilfssatz 7.3, b und $W^t = W^0$ ist $e^{-itT'} W^0 = W^0 e^{-itT}$; die daraus folgende Beziehung $e^{-itT'} H_0' \subset H_0' (t \in \mathbb{R}^m)$ ergibt mit Bemerkung 7.2, c, daß H_0' reduzierender Teilraum von T' ist.

b) Betrachtet man $W_0^0 := W^0|_{H_0}$, so vermittelt die unitäre Abbildung $W_0^0: H_0 \rightarrow H_0'$ eine unitäre Äquivalenz zwischen $(e^{-itT})_{H_0}$ und $(e^{-itT'})_{H_0'}$, daher nach Bemerkung 7.2, b auch zwischen T_{H_0} und $T'_{H_0'}$; es gilt $W^{0*} T' W^0 = W_0^{0*} T'_{H_0'} W_0^0 P_0 = T_{H_0} P_0 = T P_0$.

7.5 Bemerkung. Satz 7.4 gibt einen Hinweis, wie man unitäre Äquivalenz von Teilen kommutativer m -Tupel zeigen kann. In §8 werden wir sehen, daß die hier eingeführte Methode tatsächlich zu Resultaten führt. Daß insbesondere die Zusatzvoraussetzung " $W^t = W^0$ " in Satz 7.4 unter ziemlich allgemeinen Bedingungen gilt, werden wir in Hilfssatz 8.5 zeigen.

7.6 Definition.

Die Voraussetzungen 7.1 seien gegeben.

Sei $(t^l)_{l \in J} \subset \mathbb{R}^m$ ein Netz, $|t^l|_{l \in J} \rightarrow \infty$.

Der Operator $W = W_{(t^l)}(T', T)$ sei folgendermaßen definiert:

$D(W) := \{x \in H; \lim_{l \in J} e^{i(t+t^l)T'} e^{-i(t+t^l)T} x \text{ existiert für alle } t \in \mathbb{R}^m \text{ und ist unabhängig von } t\}$,

$Wx := \lim_{l \in J} e^{it^l T'} e^{-it^l T} x \text{ für } x \in D(W)$.

$W = W_{(t^l)} = W_{(t^l)}(T', T)$ - diese Bezeichnungen benutzen wir, je nachdem welche Abhängigkeiten wir betonen wollen -

heißt (dem Paar T, T' zugeordneter) Wellenoperator (gemäß (t^l)). Ist M eine Teilmenge von H mit $M \subset D(W)$, so sagen wir, daß W auf M existiert.

Ist $\tau \in S_{m-1}$ (Einheitssphäre in $\mathbb{R}^m$), so kann man das Netz $(s\tau)_{s \rightarrow \infty}$ betrachten.

$W_\tau := W_{(s\tau)}_{s \rightarrow \infty}$ heißt Wellenoperator in Richtung τ .

Ist insbesondere $m=1$, so erhält man die bekannten Wellenoperatoren $W_+ = W_1$, $W_- = W_{-1}$ (vgl. Kato [21], X, §3).

7.7 Satz.

Unter den Voraussetzungen von Definition 7.6 gilt für

$W := W_{(t^l)}(T', T)$, $W' := W_{(t^l)}(T, T')$:

a) $D(W)$ ist abgeschlossener Teilraum von H ;

$W: D(W) \rightarrow R(W)$ ist unitär; die entsprechenden Aussagen gelten für $D(W')$ und W' .

$D(W) = R(W')$, $D(W') = R(W)$,

$W' = W^{-1} = W^*$ (" W^* " als Adjungierte des unitären Operators $W: D(W) \rightarrow R(W)$).

b) $D(W)$ ist reduzierender Teilraum von T ;

$R(W)$ ist reduzierender Teilraum von T' .

$W^* T' W = T_{D(W)}$; $T_{D(W)}$ und $T'_{D(W')}$ sind unitär äquivalent.

7.8 Bemerkung. Aus Satz 7.7 folgt, daß der Wellenoperator W nicht "zufällig" für ein Element $x \in H$ existieren kann. Ist nämlich $x \in D(W)$, so ist nach Satz 7.7, b auch schon $H_{x,T} \subset D(W)$.

Beweis von Satz 7.7. a) Die ersten beiden Aussagen über $D(W)$, W bzw. $D(W')$, W' sind klar.

Für $x, x' \in H$, $t \in \mathbb{R}^m$, $\iota \in J$ gilt

$$\begin{aligned} \|x' - e^{i(t+t')T'} e^{-i(t+t')T} x\| &= \\ &= \|e^{i(t+t')T} e^{-i(t+t')T'} x' - x\|. \end{aligned}$$

Dieser Gleichung entnimmt man:

Ist $x \in D(W)$, $x' = Wx$, so folgt $x' \in D(W')$ und $W'x' = x$; also gilt $D(W') \supset R(W)$, $W'W = I_{D(W)}$, $R(W') \supset D(W)$.

Aus der Symmetrie der Voraussetzung folgt $D(W) \supset R(W')$, $R(W) \supset D(W')$, zusammen also

$$D(W) = R(W'), \quad R(W) = D(W') \quad \text{und} \quad W' = W^{-1}.$$

b) Sei $x \in D(W)$, $t \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{i(t'+t')T'} e^{-i(t'+t')T} e^{-itT} x &= \\ = e^{-itT'} e^{i(t+t'+t')T'} e^{-i(t+t'+t')T} x &\longrightarrow e^{-itT'} Wx, \end{aligned}$$

unabhängig von $t' \in \mathbb{R}^m$. Daher ist $e^{-itT} x \in D(W)$ und es gilt $W e^{-itT} x = e^{-itT'} Wx$.

Man erhält also $e^{-itT} D(W) \subset D(W)$ ($t \in \mathbb{R}^m$), und nach Bemerkung 7.2, c ist $D(W)$ reduzierender Teilraum von T .

Die übrigen Aussagen folgen wie im Beweis von Satz 7.4.

7.9 Folgerung.

Die Voraussetzungen von Definition 7.6 seien erfüllt.

$x \in H$ sei ein gemeinsames Eigenelement von T , d.h. es gibt $z_1, \dots, z_m$ mit $T_j x = z_j x$ ($j=1, \dots, m$).

Es sei $x \in D(W_{(t^L)}(T', T))$.

Dann gilt $T_j' x = T_j x = z_j x$ ($j=1, \dots, m$).

Beweis. Aus Satz 7.7, b folgt $T_j' Wx = z_j Wx$ ($j=1, \dots, m$).

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \|x - Wx\| &= \|e^{-i \sum_j t_j^L z_j} (x - Wx)\| = \|e^{-it^L T} x - e^{-it^L T'} Wx\| = \\ &= \|e^{it^L T'} e^{-it^L T} x - Wx\| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

also $Wx = x$.

§ 8 Unitäre Äquivalenz der absolut stetigen Teile von Operatoren - m - Tupeln, $m \geq 3$

8.1 Definition.

Sei H ein Hilbertraum, $m \in \mathbb{N}$, $T = (T_1, \dots, T_m)$ ein kommutatives m -Tupel von selbstadjungierten Operatoren in H . Das Spektralmaß E von T und die Maße μ_x ($x \in H$) (Definition 2.15) können wir ohne Einschränkung als auf $\mathbb{R}^m$ definiert annehmen, was wir im folgenden immer tun. Wir nennen (vgl. Kato [21], X-§1.2 für $m=1$)

$$H_{ac} := \{x \in H; \mu_x \text{ ist } \lambda^m\text{-absolut stetig}\}$$

den absolut stetigen Teilraum (von H bezüglich T).

$$H_s := \{x \in H; \mu_x \text{ ist singulär bezüglich } \lambda^m\}$$

heißt singulärer Teilraum (von H bezüglich T).

Wollen wir die Abhängigkeit von T hervorheben, so schreiben wir $H_{ac,T}, H_{s,T}$.

Da wir im folgenden wieder zwei m -Tupel T und T' behandeln werden, werden wir die zugehörigen Bezeichnungen $H_{ac}, \dots$ und $H'_{ac}, \dots$ verwenden.

8.2 Hilfssatz.

Die Mengen H_{ac} und H_s in Definition 8.1 sind abgeschlossene Teilräume von H mit $H = H_{ac} \oplus H_s$.

H_{ac} und H_s reduzieren T .

Beweis (vgl. Kato [21], X-Theorem 1.5 für den Fall $m=1$).

Wir zeigen $H_{ac} \perp H_s$, $H = H_{ac} + H_s$; daraus folgt $H = H_{ac} \oplus H_s$.

Sei $x \in H_{ac}$, $y \in H_s$. Wegen $\mu_x \perp \mu_y$ existiert eine Borel-Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ mit $\mu_x(\mathbb{R}^m \setminus \Omega) = 0$, $\mu_y(\Omega) = 0$. Nach Funktionalkalkül 2.16,e folgt daraus $E(\Omega)x = x$, $E(\Omega)y = 0$, $\langle x|y \rangle = \langle E(\Omega)x|y \rangle = \langle x|E(\Omega)y \rangle = 0$.

Sei $x \in H$, $\mu_x = \mu_{x,ac} + \mu_{x,s}$ die Zerlegung von μ_x in λ^m -absolut stetigen und λ^m -singulären Teil. Es existiert eine Borel-Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, so daß $\mu_{x,ac}(\mathbb{R}^m \setminus \Omega) = 0$, $\mu_{x,s}(\Omega) = 0$ ist. $f_{ac}, f_s \in L_2(\mathbb{R}^m, \mu_x)$ seien definiert durch $f_{ac} := \chi_\Omega$, $f_s := \chi_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega}$.

Sei $J_x : L_2(\mathbb{R}^m, \mu_x) \rightarrow H_x$ die unitäre Abbildung aus

Satz 2.13, $x_{ac} := J_x f_{ac}$, $x_s := J_x f_s$.

Nach Hilfssatz 2.14 und der Eindeutigkeit in Satz 2.13

gilt $\mu_{x_{ac}} = \mu_{x,ac}$, $\mu_{x_s} = \mu_{x,s}$. Also ist $x_{ac} \in H_{ac}$,

$x_s \in H_s$; es gilt

$$x_{ac} + x_s = J_x f_{ac} + J_x f_s = J_x (f_{ac} + f_s) = J_x 1 = x.$$

Sei $x \in H$, $t \in \mathbb{R}^m$, $y := e^{-itT}x$; nach Funktionalkalkül

2.16, e und Hilfssatz 2.14 gilt $\mu_y = \mu_x$.

Daraus folgt, daß H_{ac} und H_s invariante Teilräume von e^{-itT} ($t \in \mathbb{R}^m$), also nach Bemerkung 7.2, c reduzierende Teilräume von T sind.

8.3 Definition.

In der Situation von Definition 8.1 bezeichnen wir mit P_{ac} ($= P_{ac,T}$) die orthogonale Projektion auf H_{ac} .

Der Teil $T_{ac} := T_{H_{ac}}$ von T in H_{ac} heißt absolut stetiger Teil von T . Mit E_{ac} bezeichnen wir das Spektralmaß von T_{ac} ; es gilt $E_{ac} = E_{H_{ac}}$.

Wir bemerken dazu, daß sich der Index "ac" auf das ganze m -Tupel bezieht und daß im allgemeinen

$T_{ac} \neq (T_{1,ac}, \dots, T_{m,ac})$ ist; Beispiel:

$H = L_2(0,1)$; $T_1 := T_2 := M_{id}$; das gemeinsame Spektralmaß wird getragen von $\{(\xi_1, \xi_2); 0 \leq \xi_1 = \xi_2 \leq 1\}$, daher ist $H_{ac,T} = \{0\}$; jedoch gilt $H_{ac,T_1} = H_{ac,T_2} = H$.

8.4 Hilfssatz.

Sei H ein Hilbertraum, $m \in \mathbb{N}$, $T = (T_1, \dots, T_m)$ ein kommutatives m -Tupel von selbstadjungierten Operatoren in H .

Dann existieren eine Familie $(\Omega_\alpha; \alpha \in A)$ von Borel-Mengen $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ und eine unitäre Abbildung

$J: \bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A) \rightarrow H_{ac}$, so daß gilt

$(T_j)_{H_{ac}} = J M_{pr_j} J^*$ ($j = 1, \dots, m$).

Ist H separabel, so kann $A \subset \mathbb{N}$ gewählt werden.

(Hier wie im folgenden schreiben wir $L_2(\Omega) = L_2(\Omega, \mathcal{M})$.)

Beweis. Wir wenden Satz 2.11 auf T_{ac} an und erhalten eine Familie $(\mu_\alpha; \alpha \in A)$ von endlichen Borel-Maßen auf $\mathbb{R}^m$ und eine unitäre Abbildung

$$J: \bigoplus (L_2(\mathbb{R}^m, \mu_\alpha); \alpha \in A) \longrightarrow H_{ac} \quad \text{mit}$$

$$T_j J = J M_{pr_j} \quad (j=1, \dots, m).$$

Sei $1_\alpha \in \bigoplus L_2(\mathbb{R}^m, \mu_\alpha; \alpha \in A)$ definiert durch

$$(1_{\alpha, \beta})_{\beta \in A} := \begin{cases} 1 & \text{für } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{für } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Das von $J 1_\alpha$ erzeugte Maß μ_α ist wegen $J 1_\alpha \in H_{ac}$ absolut stetig; daher existiert eine Borel-Funktion $h_\alpha \geq 0$, so daß $\mu_\alpha = h_\alpha \lambda^m$ ist.

Die Menge $\Omega_\alpha := \{z \in \mathbb{R}^m; h_\alpha(z) \neq 0\}$ ist eine Borel-Menge; die Abbildung $J_\alpha: L_2(\Omega_\alpha) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^m, \mu_\alpha)$, definiert durch $J_\alpha: f \longmapsto h_\alpha^{-1/2} \cdot f$, ist unitär, und es gilt $J_\alpha M_{pr_j} = M_{pr_j} J_\alpha$ ($j=1, \dots, m$).

Der Operator $J \cdot (\bigoplus J_\alpha)$ hat die im Hilfssatz behaupteten Eigenschaften.

8.5 Hilfssatz.

Die Voraussetzungen 7.1 seien gegeben. Für jede beschränkte Borel-Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei $R(E_{ac}(\Omega)) \subset D(T'_j)$, und der Operator $K_j E_{ac}(\Omega)$ sei kompakt ($j=1, \dots, m$).

Sei $(t^\ell)_\ell \in J \subset \mathbb{R}^m$ ein Netz, $|t^\ell| \rightarrow \infty$. Dann gilt:

a) Für alle $t \in \mathbb{R}^m$ und alle $x \in H_{ac}$ geht

$$e^{i(t+t^\ell)T'} e^{-i(t+t^\ell)T} x - e^{it^\ell T'} e^{-it^\ell T} x \longrightarrow 0.$$

b) Ist $x \in H_{ac}$ und existiert $\lim e^{it^\ell T'} e^{-it^\ell T} x$,

so ist $x \in D(W_{(t^\ell)}(T', T))$;

existiert $s\text{-}\lim e^{it^\ell T'} e^{-it^\ell T} P_{ac}$, so folgt

$$H_{ac} \subset D(W_{(t^\ell)}(T', T)).$$

8.6 Bemerkung. Daß man in Hilfssatz 8.5 auf die Voraussetzungen " $K_j E_{ac}(\Omega)$ kompakt" nicht völlig verzichten kann, zeigt folgendes Beispiel:

$$H = L_2((0,1) \times (0,1)); \quad T_1 := T'_1 := M_{pr_1}, \quad T_2 := M_{pr_2}, \\ T'_2 := 0; \quad (t^L) = ((s,0))_{s \rightarrow \infty}; \quad H_{ac} = H.$$

Beweis von Hilfssatz 8.5.

a) Da $\mathbb{R}^m$ abzählbar im Unendlichen ist, genügt es, den Beweis für Folgen $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ statt für Netze $(t^L)_{L \in J}$ zu führen. Nach Hilfssatz 8.4 können wir ohne Einschränkung annehmen $H_{ac} = \bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A)$, $(T_j)_{H_{ac}} = M_{pr_j}$ ($j=1, \dots, m$). Sei $\alpha \in A$, $f \in L_2(\Omega_\alpha)$ (im folgenden betrachten wir $L_2(\Omega_\alpha)$ als kanonisch eingebettet in $\bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A)$); es existiere eine beschränkte Borel-Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, so daß gilt $f = \chi_\Omega f$. Dann ist $f \in D(T_j)$ ($j=1, \dots, m$), und wegen $e^{-itT_f}(\chi) = e^{-it\chi_f}(\chi)$ (wir schreiben $\chi = \sum t_j \chi_j$) ist $e^{-itT_f} = \chi_\Omega e^{-itT_f} = E_{ac}(\Omega) e^{-itT_f}$, daher $e^{-itT_f} \in D(T'_j)$ ($j=1, \dots, m$) für alle $t \in \mathbb{R}^m$.

Für $t \in \mathbb{R}^m$ ist also die Funktion $[0,1] \ni s \mapsto e^{i(t^n+st)T'} e^{-i(t^n+st)T_f}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $i e^{i(t^n+st)T'} (\sum t_j K_j) e^{-i(t^n+st)T_f}$ (die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit von $K_j E_{ac}(\Omega)$); daher gilt die Abschätzung (vgl. Kato [21], X-Theorem 3.7) $\| e^{i(t^n+st)T'} e^{-i(t^n+st)T_f} - e^{it^n T'} e^{-it^n T_f} \| \leq \int_0^1 \| e^{i(t^n+st)T'} (\sum t_j K_j) e^{-i(t^n+st)T_f} \| ds \leq \sum |t_j| \int_0^1 \| K_j E_{ac}(\Omega) e^{-i(t^n+st)T_f} \| ds.$

Wir werden zeigen $\| K_j E_{ac}(\Omega) e^{-i(t^n+st)T_f} \| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) für alle $s \in [0,1]$; mit $\| K_j E_{ac}(\Omega) e^{-i(t^n+st)T_f} \| \leq$

$\leq \|K_j E_{ac}(\Omega)\| \|f\|$ und dem Satz von Lebesgue (von der majorisierten Konvergenz) folgt daraus

$$\int_0^1 \|K_j E_{ac}(\Omega) e^{-i(t^n+st)T} f\| ds \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \text{ mit}$$

obiger Abschätzung also die Behauptung für das gewählte f .

Für $g \in L_2(\Omega_\alpha)$ gilt nach dem Satz von Riemann-Lebesgue

$$\langle g | e^{-itT} f \rangle = \int g(z)^* f(z) e^{-itz} dz \longrightarrow 0 \quad \text{für } |t| \rightarrow \infty$$

(g und f sind hier durch 0 auf $\mathbb{R}^m$ fortgesetzt zu

denken, es gilt $g^* f \in L_1(\mathbb{R}^m)$; die Integration ist über

$\mathbb{R}^m$ zu erstrecken); daher gilt $e^{-i(t^n+st)T} f \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$);

aus der Kompaktheit von $K_j E_{ac}(\Omega)$ folgt

$$K_j E_{ac}(\Omega) e^{-i(t^n+st)T} f \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die Menge der betrachteten f ist total in H_{ac} . Da

$$\|e^{i(t^n+t)T'} e^{-i(t^n+t)T} - e^{it^n T'} e^{-it^n T}\| \leq 2 \quad \text{ist, folgt}$$

die Behauptung für alle $f \in H_{ac}$.

b) Nach a) gilt für $x \in H_{ac}$ und $t \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} & e^{i(t+t^l)T'} e^{-i(t+t^l)T} x \\ &= (e^{i(t+t^l)T'} e^{-i(t+t^l)T} x - e^{it^l T'} e^{-it^l T} x) + e^{it^l T'} e^{-it^l T} x \\ &\longrightarrow \lim e^{it^l T'} e^{-it^l T} x, \text{ falls der letzte Grenzwert} \\ &\text{existiert.} \end{aligned}$$

Daraus folgen alle Behauptungen.

8.7 Satz.

Die Voraussetzungen 7.1 seien gegeben; sei $m \geq 3$.

Für jede beschränkte Borel-Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei $R(E_{ac}(\Omega))$

$\subset D(T_j^p)$ ($j=1, \dots, m$), und es existiere $0 < p < m$, so daß

$K_j E_{ac}(\Omega) P_{ac} \in c_p$ ist für $j=1, \dots, m$. Dann gilt:

a) Es existiert eine Nullmenge $N \subset S_{m-1}$ (Nullmenge bezüglich des Oberflächenmaßes auf der Einheitssphäre S_{m-1}),

so daß für $\tau \in S_{m-1} \setminus N$ $s\text{-}\lim_{s \rightarrow \infty} e^{is\tau T'} e^{-is\tau T} P_{ac}$ existiert.

- b) Es existiert eine Nullmenge $N \subset S_{m-1}$, so daß für $\tau \in S_{m-1} \setminus N$ gilt $H_{ac} \subset D(W_\tau(T', T))$, d.h. daß für $\tau \in S_{m-1} \setminus N$ der Wellenoperator in Richtung τ (vgl. Definition 7.6) auf H_{ac} existiert.

8.8 Bemerkung. Die Bedingung " $K_j E'_{ac}(\Omega) P_{ac} \in c_p$ " ist eine "lokale" Bedingung; "lokal" bezüglich der das Spektralmaß tragenden Menge. Eine entsprechende, allerdings schärfere Bedingung für den Fall $m=1$ wird von Birman [6], Theorem 4.3 angegeben. Birman bekommt dabei unter einer vergleichsweise milden Zusatzvoraussetzung die Vollständigkeit $H'_{ac} \subset R(W_\pm(T', T))$ der Wellenoperatoren. Diese bekommen wir nur, indem wir die entsprechenden Voraussetzungen für E'_{ac} zu den Voraussetzungen von Satz 8.7 hinzunehmen; vgl. Satz 8.10, a unter Beachtung von $D(W_\tau(T, T')) = R(W_\tau(T', T))$ (Satz 7.7, a). Dazu ist zunächst zu sagen, daß Birman qualitativ feinere Methoden verwendet als wir. Man könnte jedoch vermuten, daß aus den Voraussetzungen von Satz 8.7 unter einer milden Zusatzvoraussetzung die entsprechenden Bedingungen für E'_{ac} folgen. Dem Autor ist eine solche Zusatzvoraussetzung bisher auch im Fall $m=1$ nicht bekannt. In Bedingung 8.11 werden wir jedoch eine Bedingung angeben, unter der folgt $K_j E'_{ac}(\Omega) P_{ac}, K_j E'_{ac}(\Omega) P'_{ac} \in c_p$.

8.9 Hilfssatz.

Sei $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Borel-Menge, $r > 0$, $q > \frac{m}{r}$ und $q \geq 1$.

Dann gilt für jedes Orthonormalsystem $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{A}} \subset L_2(\Omega)$ ($\mathbb{A} \subset \mathbb{N}$)

$$\sum_{n \in \mathbb{A}} \left(\int_{|t| > 1} |t|^{-r} |\hat{\varphi}_n(t)|^2 dt \right)^q \leq (2\pi)^{-m} \lambda^m(\Omega) \int_{|t| > 1} |t|^{-r \cdot q} dt < \infty$$

($\hat{f}$ Fourier-Transformierte von $f \in L_2(\Omega)$,

$$\hat{f}(t) = (2\pi)^{-m/2} \int_{\Omega} f(z) e^{-it \cdot z} dz).$$

Beweis. Ist $(\varphi_n)_{n \in A}$ ein Orthonormalsystem in $L_2(\Omega)$, so folgt für $t \in \mathbb{R}^m$ nach der Bessel'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{n \in A} |\hat{\varphi}_n(t)|^2 &= (2\pi)^{-m} \sum |\langle e^{it \cdot} | \varphi_n \rangle_{L_2(\Omega)}|^2 \\ &\leq (2\pi)^{-m} \|e^{it \cdot}\|_{L_2(\Omega)}^2 = (2\pi)^{-m} \lambda^m(\Omega). \end{aligned}$$

Falls $q > 1$ ist, schätzen wir ab (für $q = 1$ ist die folgende Abschätzung unnötig)

$$\int_{|t|>1} |t|^{-r} |\hat{\varphi}_n(t)|^2 dt = \int_{|t|>1} |t|^{-r} |\hat{\varphi}_n(t)|^{2/q} |\hat{\varphi}_n(t)|^{2(q-1)/q} dt$$

(Hölder'sche Ungleichung)

$$\leq \left(\int_{|t|>1} |t|^{-rq} |\hat{\varphi}_n(t)|^2 dt \right)^{1/q} \underbrace{\left(\int_{|t|>1} |\hat{\varphi}_n(t)|^2 dt \right)^{(q-1)/q}}_{\leq 1}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n \in A} \left(\int_{|t|>1} |t|^{-r} |\hat{\varphi}_n(t)|^2 dt \right)^q &\leq \sum_{n \in A} \int_{|t|>1} |t|^{-r \cdot q} |\hat{\varphi}_n(t)|^2 dt \\ &\leq (2\pi)^{-m} \lambda^m(\Omega) \int_{|t|>1} |t|^{-r \cdot q} dt < \infty \quad \text{wegen } r \cdot q > m. \end{aligned}$$

Beweis von Satz 8.7. b) folgt aus a) mit Hilfssatz 8.5, b.

a) (i) Wegen Hilfssatz 8.4 können wir ohne Einschränkung

$$H_{ac} = \bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A) \quad \text{mit Borel-Mengen } \Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^m,$$

$$(T_j)_{H_{ac}} = M_{pr_j} \quad (j=1, \dots, m) \quad \text{voraussetzen.}$$

(ii) Es gibt eine abzählbare Teilmenge $A' \subset A$, so daß

$$K_j \big| \bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A \setminus A') = 0 \quad \text{ist für } j=1, \dots, m:$$

Mit $\Omega_n := \{z \in \mathbb{R}^m; |z| < n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist $K_j E_{ac}(\Omega_n)$ kompakt,

also $H_{ac} \ominus N(K_j E_{ac}(\Omega_n))$ separabel ($j=1, \dots, m$);

daher existieren abzählbare Teilmengen $A_{jn} \subset A$, so daß

$$K_j E_{ac}(\Omega_n) \big| \bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A \setminus A_{jn}) = 0 \quad \text{ist.}$$

$A' := \bigcup (A_{jn}; j=1, \dots, m, n \in \mathbb{N})$ ist abzählbar.

$$\text{Aus } K_j E_{ac}(\Omega_n) \big| \bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A \setminus A') = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, j=1, \dots, m)$$

folgt $T_j' f = T_j f$ für $f \in \bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A \setminus A') \cap D(T_j)$ ($j=1, \dots, m$),

$$T \bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A \setminus A') = T' \bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A \setminus A').$$

Für $f \in \bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A \setminus A')$ existiert also

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{isT'} e^{-isT} f = \lim_{s \rightarrow \infty} f = f \quad \text{für alle } \tau \in S_{m-1}.$$

(iii) Sei $\alpha \in A'$, $\Omega \subset \Omega_\alpha$ eine beschränkte Borel-Menge, $f := \chi_\Omega \in L_2(\Omega_\alpha)$ (Wir fassen $L_2(\Omega_\alpha)$ kanonisch als Teilraum von H auf; in der Bezeichnung werden wir nicht zwischen f und dem Bild von f unter der kanonischen Einbettung unterscheiden).

Wir zeigen, daß es eine Nullmenge $N_f \subset S_{m-1}$ gibt, so daß

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{isT'} e^{-isT} f \quad \text{existiert für } \tau \in S_{m-1} \setminus N_f.$$

Für $\tau \in S_{m-1}$, $1 \leq s' \leq s'' < \infty$ gilt

$$\|e^{is''\tau T'} e^{-is''\tau T} f - e^{is'\tau T'} e^{-is'\tau T} f\| =$$

$$= \left\| \int_{S_1}^S \frac{d}{ds} e^{is\tau T'} e^{-is\tau T} f \, ds \right\| \leq \sum_{j=1}^m |\tau_j| \int_{S_1}^S \|K_j e^{-is\tau T} f\| \, ds$$

(vgl. den Beweis von Hilfssatz 8.5,a; die Idee dieses Beweisschrittes ist die Abschätzung im "Lemma von Cook", vgl. Kato [21], X-Theorem 3.7).

Es genügt also zu zeigen, daß für $j=1, \dots, m$ Nullmengen $N_{fj} \subset S_{m-1}$ existieren, so daß für $\tau \in S_{m-1} \setminus N_{fj}$ gilt

$$\int_1^\infty \|K_j e^{-is\tau T} f\| \, ds < \infty.$$

Dann folgt nämlich mit $N_f := \bigcup (N_{fj}; j=1, \dots, m)$ die Behauptung von (iii).

(iv) Wir nehmen $j \in \{1, \dots, m\}$ und beweisen die Existenz der in (iii) erwähnten Menge N_{fj} , unterdrücken dabei aber im folgenden den Index j .

Um die Existenz der Menge $N_f (= N_{fj})$ nachzuweisen, zeigen wir

$$\int_{S_{m-1}} \int_1^\infty \|K e^{-is\tau T} f\| \, ds \, d\sigma(\tau) < \infty \quad (\text{"do" Oberflächenmaß von } S_{m-1}).$$

Wir formen um

$$\begin{aligned} \int_{S_{m-1}} \int_1^\infty \|K e^{-is\tau T} f\| \, ds \, d\sigma(\tau) &= \iint \| \dots \| s^{-(m-1)} s^{m-1} \, ds \, d\sigma(\tau) \\ &= \int_{|t|>1} |t|^{-(m-1)} \|K e^{-itT} f\| \, dt. \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \|K e^{-itT} f\| &= \|K E_{ac}(\Omega) e^{-itT} f\| = \|K E_{ac}(\Omega) P_\alpha e^{-itT} f\| = \\ &= \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \langle \varphi_n | e^{-itT} f \rangle \psi_n \right\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 |\langle \varphi_n | e^{-itT} f \rangle|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Dabei sei P_α die Orthogonalprojektion auf $L_2(\Omega_\alpha) \subset H$.

$E_{ac}(\Omega)$ und P_α können wir wegen $e^{-itT} f(z) = e^{-it\mathbf{z}} \chi_\Omega(z)$ ohne Wirkung einschieben. Wegen $K E_{ac}(\Omega) P_\alpha \in c_p$ ist auch $K E_{ac}(\Omega) P_\alpha \in c_p$ (McCarthy [24], Theorem 2.3), und es gibt Orthonormalsysteme $(\varphi_n), (\psi_n)$ in H und eine Folge

$(c_n) \subset \mathbb{C}$, so daß gilt

$$K E_{ac}(\Omega) P_\alpha = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \langle \varphi_n | \cdot \rangle \varphi_n \quad (\text{vgl. Kato [21], V-§2.3}) \quad \text{und}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^p < \infty \quad (\S 1, c).$$

Wegen $N(K E_{ac}(\Omega) P_\alpha) \supset L_2(\Omega)^\perp$ ($L_2(\Omega)$ als Teilraum von $L_2(\Omega_\alpha)$ kanonisch eingebettet in H) können wir ohne Einschränkung annehmen, daß (φ_n) ein Orthonormalsystem in $L_2(\Omega)$ ist.

Wir haben also zu zeigen

$$\int_{|t|>1} |t|^{-(m-1)} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 |\langle \varphi_n | e^{-itT} f \rangle|^2 \right)^{1/2} dt < \infty.$$

Dies beweisen wir durch mehrmalige Anwendung der Hölder'schen Ungleichung auf Integrale und Summen, unter Benutzung von Hilfssatz 8.9.

Ohne Einschränkung können wir $2 < p < m$ voraussetzen.

Wir wählen r' mit $m < r' < m + 2(\frac{m}{p} - 1)$; wegen $\frac{m}{p} > 1$ ist dies möglich.

Wir schätzen ab

$$\begin{aligned} & \int_{|t|>1} |t|^{-(m-1)} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 |\langle \varphi_n | e^{-itT} f \rangle|^2 \right)^{1/2} dt \\ &= \int_{|t|>1} |t|^{-r'/2} \cdot (|t|^{-(m-1-r'/2)} (\sum \dots)^{1/2}) dt \\ &\leq \underbrace{\left(\int_{|t|>1} |t|^{-r'} dt \right)^{1/2}}_{< \infty \text{ wegen } r' > m} \left(\int_{|t|>1} |t|^{-(2m-2-r')} (\sum \dots) dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Den zweiten Faktor behandeln wir weiter:

$$\begin{aligned} & \sum_{|t|>1} |c_n|^2 |t|^{-(2m-2-r')} |\langle \varphi_n | e^{-itT} f \rangle|^2 dt \leq \\ & (\text{Hölder'sche Ungleichung für Summen, mit } \frac{p}{2}, q = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}-1} = \frac{p}{p-2}) \\ & \leq \underbrace{(\sum |c_n|^p)^{2/p}}_{< \infty} \cdot \left(\sum_{|t|>1} (\int |t|^{-(2m-2-r')} |\langle \varphi_n | e^{-itT} f \rangle|^2 dt)^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Auf den zweiten Faktor der letzten Abschätzung wollen wir

Hilfssatz 8.9 anwenden. Dazu bemerken wir zunächst, daß

$$\langle \varphi_n | e^{-itT_f} \rangle = \int_{\Omega} \varphi_n^*(z) e^{-itz} \chi_{\Omega}(z) dz = (2\pi)^{m/2} \widehat{\varphi_n}(t) \quad (t \in \mathbb{R}^m)$$

ist und daß mit (φ_n) auch (φ_n^*) ein Orthonormalsystem in $L_2(\Omega)$ ist. Weiterhin weisen wir nach, daß für

$$r := 2m-2-r', \quad q = \frac{p}{p-2} \text{ gilt}$$

$$r > 0, \quad r \cdot q > m, \quad q \geq 1:$$

$$q \geq 1 \text{ folgt aus } p > 2;$$

$$\text{wegen } r' < m + 2\left(\frac{p}{p-2} - 1\right) \text{ ist}$$

$$r = 2m-2-r' > 2m-2-m-2\frac{m}{p}+2 = m\left(1-\frac{2}{p}\right) > 0,$$

$$r \cdot q > m\left(1-\frac{2}{p}\right) \frac{p}{p-2} = m.$$

Die Behauptung von Hilfssatz 8.9 ergibt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{|t|>1} |t|^{-(2m-2-r')} |\langle \varphi_n | e^{-itT_f} \rangle|^2 dt \right)^q < \infty,$$

woraus insgesamt die am Anfang von (iv) aufgestellte Behauptung folgt.

(v) Für jedes $\alpha \in A'$ gibt es eine abzählbare Familie $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von beschränkten Borel-Mengen $\Omega_k \subset \Omega_\alpha$, so daß die Funktionenmenge $\{\chi_{\Omega_k}; k \in \mathbb{N}\}$ total in $L_2(\Omega_\alpha)$ ist (z.B. kann man die Menge der beschränkten Quader mit rationalen Eckpunkten, geschnitten mit Ω_α , nehmen).

Da A' abzählbar ist, gibt es also eine abzählbare totale Menge $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ von $\oplus(L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A')$, so daß f_n die am Anfang von (iii) beschriebene Gestalt hat ($n \in \mathbb{N}$).

Nach (iii) und (iv) gibt es Nullmengen $N_n \subset S_{m-1}$, so daß für $\tau \in S_{m-1} \setminus N_n$ $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{is\tau T'} e^{-is\tau T} f_n$ existiert ($n \in \mathbb{N}$).

Mit der Nullmenge $N := \bigcup (N_n; n \in \mathbb{N})$ existiert für

$\tau \in S_{m-1} \setminus N$ der Grenzwert $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{is\tau T'} e^{-is\tau T} f$ für alle

$f \in L\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$, wegen $\|e^{is\tau T'} e^{-is\tau T}\| \leq 1$ also auch für

alle $f \in \overline{L\{f_n; n \in \mathbb{N}\}} = \bigoplus (L_2(\Omega_\alpha); \alpha \in A')$.

Zusammen mit der Aussage am Ende von (ii) ergibt sich die Behauptung von a).

8.10 Satz.

Die Voraussetzungen 7.1 seien gegeben, sei $m \geq 3$.

Für jede beschränkte Borel-Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ gelte

$R(E_{ac}(\Omega)) \subset D(T'_j)$ und $R(E'_{ac}(\Omega)) \subset D(T_j)$, und es existiere $0 < p < m$, so daß $K_j E_{ac}(\Omega) P_{ac} \in c_p$ und $K_j E'_{ac}(\Omega) P'_{ac} \in c_p$ sind ($j = 1, \dots, m$). Dann gilt:

a) Es existiert eine Nullmenge $N \subset S_{m-1}$, so daß für

$\tau \in S_{m-1} \setminus N$ gilt

$$H_{ac} \subset D(W_\tau(T', T)) \text{ , } H'_{ac} \subset D(W_\tau(T, T')).$$

b) T_{ac} und T'_{ac} sind unitär äquivalent; und zwar wird für jedes $\tau \in S_{m-1} \setminus N$ (N aus a)) eine unitäre Äquivalenz vermittelt durch $W_\tau(T', T)|_{H_{ac}} : H_{ac} \rightarrow H'_{ac}$.

Beweis. a) Nach Satz 8.7, b gibt es Nullmengen

$N_1, N_2 \subset S_{m-1}$, so daß für $\tau \in S_{m-1} \setminus N_1$ gilt

$H_{ac} \subset D(W_\tau(T', T))$, für $\tau \in S_{m-1} \setminus N_2$ gilt $H'_{ac} \subset D(W_\tau(T, T'))$.

Mit $N := N_1 \cup N_2$ gilt die Behauptung.

b) Sei $\tau \in S_{m-1} \setminus N$ mit N aus a).

Wir bezeichnen $W_\tau := W_\tau(T', T)$, $W'_\tau := W_\tau(T, T')$.

Nach Satz 7.7, b vermittelt $W_\tau : D(W_\tau) \rightarrow D(W'_\tau)$ eine unitäre Äquivalenz zwischen $T_{D(W_\tau)}$ und $T'_{D(W'_\tau)}$.

Daraus folgt, daß $W_\tau H_{ac}$ ein reduzierender Teilraum von

T' ist mit $W_\tau H_{ac} \subset H'_{ac}$; ebenso folgt $W'_\tau H'_{ac} \subset H_{ac}$. Mit

$W'_\tau = W_\tau^{-1}$ folgt $W_\tau H_{ac} = H'_{ac}$ und daraus die Behauptung.

8.11 Bedingung.

Die Voraussetzungen 7.1 seien gegeben. Sei $D(T_j') = D(T_j)$ ($j = 1, \dots, m$). Es gebe $0 < p < m$ und $\lambda_j \in \mathcal{P}(T_j)$,

so daß $K_j (\lambda_j - T_j)^{-1} \in c_p$ ist ($j = 1, \dots, m$).

Dann gilt $K_j E(\Omega) \in c_p$, $K_j E'(\Omega) \in c_p$ für jede beschränkte Borel-Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ($j = 1, \dots, m$).

Beweis. (i) Aus $K_j (\lambda_j - T_j)^{-1} \in c_p$ folgt $K_j E(\Omega) \in c_p$ für jede beschränkte Borel-Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$:

Für eine solche Menge Ω ist nämlich $(\lambda_j - T_j) E(\Omega) \in B(H)$, daher $K_j E(\Omega) = K_j (\lambda_j - T_j)^{-1} (\lambda_j - T_j) E(\Omega) \in c_p$ (McCarthy [24], Theorem 2.3).

(ii) Mit der ersten Resolventengleichung

$(\lambda - T_j)^{-1} - (\lambda_j - T_j)^{-1} = (\lambda_j - \lambda)(\lambda_j - T_j)^{-1}(\lambda - T_j)^{-1}$ folgt $K_j (\lambda - T_j)^{-1} = K_j (\lambda_j - T_j)^{-1} (I + (\lambda_j - \lambda)(\lambda - T_j)^{-1}) \in c_p$ für alle $\lambda \in \mathcal{P}(T_j)$, insbesondere für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Nach der zweiten Resolventengleichung

$(\lambda - T_j')^{-1} - (\lambda - T_j)^{-1} = (\lambda - T_j)^{-1}(T_j' - T_j)(\lambda - T_j')^{-1}$ gilt

$(\lambda - T_j')^{-1} = (\lambda - T_j)^{-1} (I + (T_j' - T_j)(\lambda - T_j')^{-1})$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Aus $D(T_j') = D(T_j)$ und dem Graphensatz folgt $T_j (\lambda - T_j')^{-1} \in B(H)$; außerdem gilt $T_j' (\lambda - T_j')^{-1} \in B(H)$.

Aus $K_j (\lambda - T_j)^{-1} \in c_p$ folgt damit

$K_j (\lambda - T_j')^{-1} = K_j (\lambda - T_j)^{-1} (I + (T_j' - T_j)(\lambda - T_j')^{-1}) \in c_p$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(iii) Aus (ii) folgert man $K_j E'(\Omega) \in c_p$ mit dem Beweis in (i).

8.12 Folgerung.

Die Voraussetzungen 7.1 seien gegeben, sei $m \geq 3$.

$K_j (= T'_j - T_j)$ sei dicht definiert und beschränkt;

es existiere $0 < p < m$, so daß $\overline{K_j} \in c_p$ ist ($j=1, \dots, m$).

Dann gilt:

a) Es existiert eine Nullmenge $N \subset S_{m-1}$, so daß für

$\tau \in S_{m-1} \setminus N$ gilt

$$H_{ac} \subset D(W_\tau(T', T)) \quad , \quad H'_{ac} \subset D(W_\tau(T, T')).$$

b) T_{ac} und T'_{ac} sind unitär äquivalent; und zwar wird für jedes $\tau \in S_{m-1} \setminus N$ (N aus a)) eine unitäre Äquivalenz vermittelt durch $W_\tau(T', T)|_{H_{ac}} : H_{ac} \rightarrow H'_{ac}$.

Beweis. Aus den Voraussetzungen über K_j folgt

$D(T'_j) = D(T_j)$ ($j=1, \dots, m$). Damit folgen die Behauptungen aus Satz 8.10.

§ 9 Ergebnisse für normale Operatoren ($m=2$)

9.1 Bemerkungen. a) Ist (T_1, T_2) ein kommutatives Paar von selbstadjungierten Operatoren in einem Hilbertraum H , so ist $N = T_1 + iT_2$ ein normaler Operator in H . Entsprechend findet man zu jedem normalen Operator N ein kommutatives Paar (vgl. Bemerkung 3.2, b). Das Spektralmaß von N auf $\mathbb{C}$ entspricht in kanonischer Weise dem Spektralmaß von (T_1, T_2) auf $\mathbb{R}^2$. Wir werden die Sätze im folgenden meist für vertauschbare Paare von selbstadjungierten Operatoren und nicht für normale Operatoren aussprechen.

b) Da die Sätze 8.7 und 8.10 und Folgerung 8.12 wegen der Voraussetzung " $m \geq 3$ " hier nicht anwendbar sind,

werden in diesem Paragraphen verschiedene Resultate bewiesen und gesammelt, die in die richtige Richtung zu weisen scheinen. Die Resultate dieses Paragraphen können nicht völlig befriedigen (vgl. Bemerkung 10.4,a); deshalb streben wir hier auch nicht die größtmögliche Allgemeinheit in der Formulierung der Sätze an.

9.2 Satz.

Die Voraussetzungen 7.1 seien gegeben, sei $m = 2$.

K_1, K_2 seien dicht definiert und beschränkt;

$\overline{K_1} \in c_1$, $\overline{K_2}$ kompakt. Dann gilt:

a) Für $\tau_{1/2} := (\pm 1, 0) \in S_1$ gilt

$$H_{ac} \subset D(W_{\tau_{1/2}}(T', T)) \quad , \quad H'_{ac} \subset D(W_{\tau_{1/2}}(T, T')) \quad .$$

b) T_{ac} und T'_{ac} sind unitär äquivalent.

Beweis. a) Aus $\overline{K_1} \in c_1$ folgt nach Satz 10.1 (Satz von Kato - Rosenblum) $H_{ac, T_1} \subset D(W_{\pm}(T'_1, T_1))$.

Wir zeigen $H_{ac, T} \subset H_{ac, T_1}$:

Sei $x \in H_{ac, T}$, d.h. $\mu_{x, T}$ ist absolut stetig bezüglich χ^2 .

Man verifiziert unter Benutzung von Satz 2.13, daß μ_{x, T_1} gegeben ist durch $\mu_{x, T_1}(\Omega) = \mu_{x, T}(\Omega \times \mathbb{R})$ ($\Omega \subset \mathbb{R}$ Borel-Menge). Sei $\lambda^1(\Omega) = 0$; dann ist $\chi^2(\Omega \times \mathbb{R}) = 0$,

$\mu_{x, T_1}(\Omega) = \mu_{x, T}(\Omega \times \mathbb{R}) = 0$, da $\mu_{x, T}$ χ^2 -absolut stetig ist.

Also ist μ_{x, T_1} absolut stetig bezüglich λ^1 , $x \in H_{ac, T_1}$.

Damit gilt $H_{ac} \subset D(W_{\pm}(T'_1, T_1))$; mit Hilfssatz 8.5,b

folgt daraus $H_{ac} \subset D(W_{\tau_{1/2}}(T', T))$.

Mit dem soeben Bewiesenen und der Symmetrie der Voraussetzung folgt $H'_{ac} \subset D(W_{\tau_{1/2}}(T, T'))$.

b) folgt aus a) wie im Beweis von Satz 8.10,b.

9.3 Bemerkung. Es ist interessant, daß die Schärfe der Voraussetzung an K_1 in Satz 9.2 eine relativ schwache Forderung an K_2 erlaubt; allerdings existieren die Wellenoperatoren dafür auch nur in einzelnen Richtungen. Analoge Sätze ließen sich für $m \geq 3$ unter Benutzung von Hilfssatz 8.5 und Satz 8.7 beweisen; dies wollen wir nicht weiter ausführen.

Daß man in Satz 9.2 auf die Voraussetzung " $\overline{K}_2$ kompakt" nicht völlig verzichten kann, zeigt das Beispiel in Bemerkung 8.6. Vgl. dazu auch Satz 9.6, für dessen Aussage die Voraussetzung " K_2 kompakt" nicht benötigt wird.

9.4 Folgerung (Die Formulierung stammt von Berg [5], Theorem 4; jedoch ist der dort angegebene Beweis falsch). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt, $\Omega \neq \emptyset$, T definiert durch $Tf(z) = (z_1 + iz_2)f(z)$ ($f \in L_2(\Omega)$).

Dann kann nicht $T = D + K$ sein, mit D diagonal, $K \in c_1$.

Beweis. Ist $K \in c_1$, $D = T - K$ normal, so folgt aus Satz 9.2, b, daß D_{ac} unitär äquivalent zu $T_{ac} = T$ ist. Damit ist D nicht diagonal. (Wir haben hier Bezeichnungen für normale Operatoren benutzt, die eigentlich nur für kommutative m -Tupel von selbstadjungierten Operatoren erklärt sind. Mit Bemerkung 9.1, a ist die Bedeutung dieser Bezeichnungen für normale Operatoren klar.)

9.5 Bemerkung. Den Beweis von Folgerung 9.4 mit Satz 9.2 zu führen, ist eigentlich nicht angemessen. Dies zeigt der folgende Satz 9.6, der Folgerung 9.4 verallgemeinert und dessen Beweis ohne die Ergebnisse von §7 und §8 geführt wird.

9.6 Satz.

Sei H ein Hilbertraum, $T \in B(H)$ mit

$$H_{ac, \operatorname{Re} T} \neq \{0\} \quad \left(\operatorname{Re} T = \frac{1}{2}(T + T^*) \right).$$

Dann existiert nicht $K \in B(H)$ mit $\operatorname{Re} K \in c_1$, so daß $T + K$ diagonal ist.

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe $K \in B(H)$, $\operatorname{Re} K \in c_1$, so daß $T + K$ diagonal ist. Dann ist $(T + K)^*$ diagonal mit derselben Eigenbasis wie $T + K$.

$$\text{Daher ist } T + K + (T + K)^* = (T + T^*) + (K + K^*)$$

selbstadjungiert und diagonal; $((T + T^*) + (K + K^*))_{ac} = 0$.

Andererseits ist $K + K^* \in c_1$; nach Satz 10.1 (Satz von Kato - Rosenblum) ist $((T + T^*) + (K + K^*))_{ac}$ unitär äquivalent zu $(T + T^*)_{ac}$ ($\neq 0$ nach Voraussetzung). Widerspruch!

9.7 Satz (Berg [5], Theorem 5).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt, $\Omega \neq \emptyset$, T definiert durch $Tf(z) = (z_1 + iz_2)f(z)$ ($f \in L_2(\Omega)$).

Sei D ein diagonaler Operator in $L_2(\Omega)$, (φ_n) die zu D gehörende Eigenbasis, $K = D - T$.

Dann gilt für $0 < p < 2$: $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|K\varphi_n\|^p = \infty$.

9.8 Bemerkung. Könnten wir Satz 9.7 für $p = 2$ beweisen, so hieße dies $K \notin c_2$; damit wäre ein Gegenstück zu Satz 3.1 im Fall $m = 2$ gefunden. Jedoch kann man aus Satz 9.7 nicht einmal folgern $K \notin c_p$ für $p < 2$. Wie wenig tatsächlich das obige Resultat bedeutet, zeigt folgende Bemerkung von J. Weidmann:

Sei H ein unendlichdimensionaler Hilbertraum,

$0 \neq K = \langle \varphi | \cdot \rangle \psi$ ein eindimensionaler Operator.

Dann existiert ein Orthonormalsystem (φ_n) in H , so daß $\sum \|K\varphi_n\|^p = \infty$ ist für alle $0 < p < 2$.

Klarerweise äquivalent zu dieser Formulierung ist die folgende: Zu jeder Orthonormalfolge (φ_n) in H gibt es $\varphi \in H$, so daß $\sum |\langle \varphi | \varphi_n \rangle|^p = \infty$ ist für alle $0 < p < 2$. Zum Beweis dieser Aussage sei $(c_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge mit $\sum |c_n|^2 < \infty$, $\sum |c_n|^p = \infty$ für alle $0 < p < 2$. Mit $\varphi := \sum c_n \varphi_n$ gilt dann die Behauptung.

9.9 Hilfssatz.

Sei $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine Borel-Menge, $\lambda^m(\Omega) > 0$.

(φ_n) sei eine Orthonormalbasis von $L_2(\Omega)$.

Dann gilt $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{\Omega'} |\varphi_n(z)| dz \right)^2 = \infty$

für jede Borel-Menge $\Omega' \subset \Omega$ mit $\lambda^m(\Omega') > 0$.

Beweis. Wir nehmen an, es existiere $\Omega' \subset \Omega$ mit

$\sum \left(\int_{\Omega'} |\varphi_n(z)| dz \right)^2 < \infty$; ohne Einschränkung können wir Ω' als beschränkt voraussetzen.

In $L_2(\Omega')$ existiert eine Orthonormalfolge (ψ_k) mit

$$|\psi_k(z)| = (\lambda^m(\Omega'))^{-1/2} \quad (z \in \Omega', k \in \mathbb{N}).$$

Es gilt $1 = \|\psi_k\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \varphi_n | \psi_k \rangle|^2 \quad (k \in \mathbb{N})$.

Sei $n' \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß

$$\sum_{n=n'+1}^{\infty} \left(\int_{\Omega'} |\varphi_n(z)| dz \right)^2 \leq \frac{1}{4} \lambda^m(\Omega') \quad \text{ist.}$$

Wegen $\langle \varphi_n | \psi_k \rangle \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N})$ existiert $k' \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{n=1}^{n'} |\langle \varphi_n | \psi_{k'} \rangle|^2 \leq \frac{1}{4} \quad \text{ist. Mit}$$

$$|\langle \varphi_n | \psi_{k'} \rangle|^2 = \left| \int_{\Omega'} \varphi_n^*(z) \psi_{k'}(z) dz \right|^2 \leq \left(\int_{\Omega'} |\varphi_n(z)| dz \right)^2 \lambda^m(\Omega')^{-1}$$

folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi_n | \psi_{k'} \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{n'} \dots + \sum_{n=n'+1}^{\infty} \dots \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} + \lambda^m(\Omega')^{-1} \cdot \sum_{n=n'+1}^{\infty} \left(\int_{\Omega'} |\varphi_n(z)| dz \right)^2 \leq \frac{1}{4} + \lambda^m(\Omega')^{-1} \cdot \frac{1}{4} \lambda^m(\Omega')$$

$$\leq \frac{1}{2}, \quad \text{im Widerspruch zu } \|\psi_{k'}\| = 1.$$

Beweis von Satz 9.7. Nehmen wir an, es gäbe ein $0 < p < 2$ mit $\sum \|K\varphi_n\|^p < \infty$.

Wir werden eine Borel-Menge $\Omega' \subset \Omega$ mit $\lambda^2(\Omega') > 0$ gewinnen, so daß gilt $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{\Omega'} |\varphi_n(z)| \, dz \right)^2 < \infty$, was nach Hilfssatz 9.9 ein Widerspruch ist.

Sei $z_1^n + i z_2^n$ der zum Eigenelement φ_n gehörende Eigenwert von D , $z^n = (z_1^n, z_2^n) \in \mathbb{R}^2$.

Sei $r_n := \|K\varphi_n\|$; wegen $\|K\varphi_n\|^2 = \int_{\Omega} |z^n - z|^2 |\varphi_n(z)|^2 \, dz \neq 0$ ist $r_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$); nach Annahme gilt $\sum r_n^2 < \infty$.

Weiterhin gilt die Abschätzung (wir setzen φ_n durch 0 auf $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ fort; wegen $\sum \|K\varphi_n\|^p < \infty$ ist die Folge (z^n) beschränkt, und es existiert R , so daß $|z^n - z| < R$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, $z \in \Omega$)

$$\begin{aligned} \left(\int_{|z^n - z| > r_n} |\varphi_n(z)| \, dz \right)^2 &= \left(\int_{|z^n - z| > r_n} \frac{|z^n - z| |\varphi_n(z)|}{|z^n - z|} \, dz \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\int_{|z^n - z| > r_n} |z^n - z|^2 |\varphi_n(z)|^2 \, dz \right) \left(\int_{R > |z^n - z| > r_n} |z^n - z|^{-2} \, dz \right) \\ &\leq \|K\varphi_n\|^2 \cdot 2\pi \cdot \log \frac{R}{r_n} = \|K\varphi_n\|^2 (-2\pi) \cdot \log (\|K\varphi_n\|^{-1} R) \\ &= \|K\varphi_n\|^p (\|K\varphi_n\|^{2-p} (-2\pi) \log \frac{\|K\varphi_n\|}{R}) \leq C \|K\varphi_n\|^p, \end{aligned}$$

mit einer von $\max_{n \in \mathbb{N}} \|K\varphi_n\|$ abhängenden Konstante $C < \infty$.

Sei n' so, daß $\sum_{n=n'}^{\infty} \pi r_n^2 < \lambda^2(\Omega)$ ist; für

$\Omega' := \{z \in \Omega; |z^n - z| > r_n \text{ für alle } n \geq n'\}$ gilt dann

$$\lambda^2(\Omega') = \lambda^2(\Omega) - \lambda^2\left(\bigcup_{n \geq n'} K(z^n, r_n) \cap \Omega\right) \geq \lambda^2(\Omega) - \sum_{n \geq n'} \pi r_n^2 > 0;$$

außerdem gilt wegen der oben hergeleiteten Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{\Omega'} |\varphi_n(z)| \, dz \right)^2 &\leq \sum_{n=1}^{n'-1} (\dots)^2 + \sum_{n=n'}^{\infty} \left(\int_{|z^n - z| > r_n} |\varphi_n(z)| \, dz \right)^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{n'-1} (\dots)^2 + C \sum_{n=n'}^{\infty} \|K\varphi_n\|^p < \infty. \end{aligned}$$

9.10 Satz (Spezialfall von Dunford - Schwartz [12], XX.2.7).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt, $T \in B(L_2(\Omega))$ definiert durch $Tf(z) := (z_1 + iz_2)f(z)$ ($f \in L_2(\Omega)$).

Sei $c > 4$.

Dann existiert $\varepsilon > 0$, so daß für alle $k \in L_c(\Omega \times \Omega)$ mit $(\int_{\Omega \times \Omega} |k(z, \eta)|^c dz d\eta)^{1/c} \leq \varepsilon$ gilt:

Die Operatoren T und $T+K$ sind ähnlich, d.h. es existieren $U, V \in B(L_2(\Omega))$ mit $UV = VU = I$, so daß $T+K = UTV$ ist

($K \in B(L_2(\Omega))$) ist definiert durch $Kf(z) = \int_{\Omega} k(z, \eta)f(\eta) d\eta$.

Zum Beweis siehe Dunford - Schwartz, loc. cit.

9.11 Bemerkungen. a) Der Beweis von Satz 9.10 beruht auf einer Methode von Friedrichs [14].

Dem Autor ist keine Vergleichsmöglichkeit zwischen der in Satz 9.10 angegebenen Bedingung " $k \in L_c$ für ein $c > 4$ " und den in dieser Arbeit verwendeten c_p -Bedingungen bekannt; abgesehen von der trivialen Bemerkung, daß wegen $k \in L_c \subset L_4 \subset L_2(\Omega \times \Omega)$ folgt $K \in c_2$.

b) In Satz 9.10 kann nur eine Aussage über die Ähnlichkeit der Operatoren T und $T+K$ gemacht werden. Daß für den Fall, daß auch $T+K$ normal ist, die unitäre Äquivalenz folgt, zeigt der folgende Hilfssatz 9.12.

9.12 Hilfssatz (Putnam [26], Theorem I).

Sei H ein Hilbertraum, $N_1, N_2 \in B(H)$ normale Operatoren, N_1 und N_2 seien ähnlich (vgl. Satz 9.10).

Dann sind N_1 und N_2 unitär äquivalent.

Zum Beweis siehe Putnam, loc. cit.

§ 10 Bemerkungen und Vergleich mit bekannten Resultaten

10.1 Satz von Kato - Rosenblum (Rosenblum [29], Kato [20]).

Sei H ein Hilbertraum, T, T' selbstadjungierte Operatoren in H , $T' = T + K$ mit $K \in c_1$. Dann gilt:

a) $H_{ac} \subset D(W_{\pm}(T', T))$, $H'_{ac} \subset D(W_{\pm}(T, T'))$.

b) T_{ac} und T'_{ac} sind unitär äquivalent.

Zum Beweis siehe z.B. Kato [21], X-§4.3.

10.2 Bemerkung. Der Satz von Kato - Rosenblum ist in vielfältiger Weise verallgemeinert worden. Dabei wird im allgemeinen die "absolute" Voraussetzung " $K \in c_1$ " ersetzt durch eine "relative", d.h. durch eine die Eigenschaften von T mit benutzende. Als einzige Arbeit wollen wir dazu nochmals Birman [6] nennen, vgl. Bemerkung 8.8. Insbesondere hätten wir durch Zitieren von Birman [6], Theorem 4.3 statt des Satzes von Kato - Rosenblum die Voraussetzungen in Satz 9.2 denen von Satz 8.7 angleichen können.

10.3 Übersicht. Wir wollen hier eine qualitative

Zusammenfassung der Ergebnisse der §§ 3, 8 und 9 geben.

Dabei sei H ein separabler Hilbertraum, T und T' seien kommutative m -Tupel von selbstadjungierten Operatoren in H , mit $T'_j = T_j + K_j$ ($j = 1, \dots, m$).

"stabil für p " soll heißen: Sind $K_1, \dots, K_m \in c_p$, so sind

T_{ac} und T'_{ac} unitär äquivalent.

"instabil für p " soll heißen: Bei gegebenem T gibt es

$K_1, \dots, K_m \in c_p$, so daß T' diagonal ist.

Mit diesen Bezeichnungen gilt für

- $m = 1$: stabil für $p \leq 1$ (Satz 10.1),
 instabil für $p > 1$ (Satz 3.1),
 $m = 2$: stabil für $p \leq 1$ (Satz 9.2),
 instabil für $p > 2$ (Satz 3.1),
 $m \geq 3$: stabil für $p < m$ (Folgerung 8.12),
 instabil für $p > m$ (Satz 3.1).

10.4 Bemerkungen. a) Aus der Übersicht 10.3 wird klar, daß nur im Fall $m=1$ bisher eine vollständige Alternative gezeigt werden konnte; diese wird noch schärfer, wenn man das in Bemerkung 3.2,a erwähnte Resultat von Kuroda mit einbezieht. Für die Fälle $m \geq 3$ fehlt nur die Einordnung der Möglichkeit $p=m$. Am gravierendsten ist das Fehlen von Ergebnissen für $m=2$, $1 < p \leq 2$; insbesondere war ja unser Ausgangspunkt das Problem, ein Gegenstück zu dem "Satz von Weyl - von Neumann für normale Operatoren" (Satz 3.1 für $m=2$) zu finden.

b) In den "stabilen" Fällen der Übersicht 10.3 existieren die Wellenoperatoren W_τ für $\tau \in S_{m-1} \setminus N$, mit einer Nullmenge $N \subset S_{m-1}$. (Im Fall $m=1$ hat man dabei $S_0 = \{1, -1\}$ mit dem zählenden Maß zu betrachten)

10.5 Vermutungen. In Analogie zum Fall $m=1$ und in Anbetracht der Resultate für $m \geq 3$ liegen für die Fälle $m \geq 2$ folgende Vermutungen nahe (Bezeichnungen wie in Übersicht 10.3):

- a) stabil für $p \leq m$??
 b) für $p \leq m$ existieren die Wellenoperatoren W_τ für $\tau \in S_{m-1} \setminus N$, mit einer Nullmenge $N \subset S_{m-1}$??

Die in b) ausgesprochene Vermutung ist falsch, vgl.

Bemerkung 11.4.

10.6 Bemerkungen zu Vermutung 10.5,a.

a) $m \geq 3$. Vergleicht man den Beweis von Satz 8.7 mit dem des Satzes von Kato - Rosenblum (Satz 10.1), so wird plausibel, daß wir mit den Methoden von §8 nicht den Grenzfall $p = m$ behandeln können. In Schritt (iii) des Beweises von Satz 8.7 wird nämlich eine für den Grenzfall wahrscheinlich zu grobe Abschätzung verwendet: Um die Konvergenz einer Funktion bei $t \rightarrow \infty$ zu zeigen, zeigt man, daß der Betrag der Ableitung integrierbar ist ("Cook's Lemma", vgl. Kato [21], X-Theorem 3.7). Beim Beweis des Satzes von Kato - Rosenblum kommt man auch nicht mit dieser Abschätzung aus. Zunächst kann man diese zwar für endlichdimensionale Näherungen der Störung verwenden, dann wird jedoch die Methode verfeinert (vgl. Kato [21], X-§4.3). Weiterhin zeigt Bemerkung 11.4, daß man in den Grenzfällen $p = m$ die Existenz von Richtungswellenoperatoren wohl gar nicht erwarten kann, d.h. daß man in diesen Fällen wahrscheinlich anders vorgehen muß.

b) $m = 2$. In diesem Fall kommt man nicht weiter in Schritt (iv) des Beweises von Satz 8.7, und zwar an der Stelle, wo man mit der Hölder'schen Ungleichung abzuschätzen beginnt. Die wesentliche Idee ist dort, die Potenz $|t|^{-(m-1)}$ so aufzuspalten, daß nach Quadrieren der eine Faktor über $\{t \in \mathbb{R}^m; |t| > 1\}$ integrierbar ist, im anderen eine negative Potenz übrigbleibt. Dies ist jedoch für $m = 2$ nicht möglich.

§ 11 Ein Beispiel

Die Betrachtungen der §§ 7 bis 10 sind abstrakt, und man kann sich fragen, ob z.B. die Situation von Satz 8.7 überhaupt nichttrivial eintreten kann, d.h. ob die Voraussetzungen von Satz 8.7 nicht vielleicht schon $T'_{ac} = T_{ac}$ implizieren, was natürlich die Sätze dieser §§ bedeutungslos machen würde. Tatsächlich haben wir bisher kein nichttriviales Beispiel für die Situation von Folgerung 8.12 finden können. In diesem Paragraphen geben wir ein nichttriviales Beispiel, für das die Voraussetzungen von Satz 8.7 und Satz 8.10 erfüllt sind.

11.1 Beispiel.

Sei $m \in \mathbb{N}$, $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-meßbar.

Wir definieren zwei unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}^m$ in $H := L_2(\mathbb{R}^m)$ und erhalten kommutative m -Tupel gemäß Bemerkung 7.2,b.

$U: \mathbb{R}^m \ni t \mapsto U(t)$ sei definiert durch

$U(t)f(x) := f(x-t)$ ($f \in H$), d.h. $U(t)$ ist eine Translation.

Man verifiziert, daß die in Bemerkung 7.2,a aufgeführten Eigenschaften erfüllt sind. Sei $T = (T_1, \dots, T_m)$ das m -Tupel, das U gemäß Bemerkung 7.2,b erzeugt.

Für $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^m)$ (C_0^1 = einmal stetig differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger) gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} (U(0, \dots, 0, \underset{j}{s}, 0, \dots, 0) \varphi - \varphi) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} (\varphi(\dots, (0, \underset{j}{s}, 0)) - \varphi) = -\partial_j \varphi$$

(wir schreiben $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$), also ist $\varphi \in D(T_j)$, und es gilt $T_j \varphi = -i \partial_j \varphi$ ($j = 1, \dots, m$).

$U' : \mathbb{R}^m \ni t \mapsto U'(t)$ sei definiert durch

$$U'(t)f(x) := e^{iG(x-t)}e^{-iG(x)}f(x-t) \quad (f \in H).$$

Wiederum verifiziert man die Eigenschaften in

Bemerkung 7.2, a. Sei $T' = (T'_1, \dots, T'_m)$ das U' erzeugende m -Tupel. Um Angaben über T' machen zu können, setzen wir zusätzlich voraus $G \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^m)$, $\partial_j G \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^m)$ ($j=1, \dots, m$).

Für $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^m)$ gilt dann

$$\begin{aligned} s^{-1}(U'(0, s, 0)\varphi - \varphi) &= \\ &= s^{-1}(e^{iG(\cdot - (0, s, 0))}e^{-iG} \varphi(\cdot - (0, s, 0)) - \varphi) = \\ &= s^{-1}e^{iG(\cdot - (0, s, 0))} - iG \cdot (\varphi(\cdot - (0, s, 0)) - \varphi) + \\ &\quad + s^{-1}(e^{iG(\cdot - (0, s, 0))} - iG - 1)\varphi \\ &\longrightarrow -\partial_j \varphi - i(\partial_j G) \cdot \varphi \quad \text{für } s \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Für den Beweis des letzten Grenzüberganges können wir wegen der Kompaktheit von $\text{supp } \varphi$ ohne Einschränkung voraussetzen, daß $\text{supp } G$ kompakt ist.

Der erste Term ergibt sich, da

$$|e^{iG(\cdot - (0, s, 0))} - iG - 1| \leq |G(\cdot - (0, s, 0)) - G| \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow 0)$$

in $L_2(\mathbb{R}^m)$.

Um den zweiten Term zu erhalten, setzen wir zunächst

zusätzlich $G \in C^1(\mathbb{R}^m)$ voraus. Dann erhält man

$$\begin{aligned} \|s^{-1}(e^{iG(\cdot - (0, s, 0))} - iG - 1) + i\partial_j G\|^2 &= \\ &= |s|^{-2} \int_0^s \left| \int_0^\sigma (-\partial_j G(x - (0, \sigma, 0)))e^{iG(x - (0, \sigma, 0))} + \right. \\ &\quad \left. + \partial_j G(x)e^{iG(x)} \right| d\sigma \Big|^2 dx = \\ &\leq s^{-1} \int_0^s \|-\partial_j G(\cdot - (0, \sigma, 0))e^{iG(\cdot - (0, \sigma, 0))} + \partial_j G e^{iG}\|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung erhält man auch für alle $G \in L_2(\mathbb{R}^m)$ mit $\partial_j G \in L_2(\mathbb{R}^m)$ und $\text{supp } G$ kompakt, wie man durch Glättung von G nachweist (Ist $(G_n) \subset C_0^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ eine Folge mit

$G_n \rightarrow G$, $\partial_j G_n \rightarrow \partial_j G$ in $L_2(\mathbb{R}^m)$, so gilt

$$\begin{aligned} \|e^{iG_n}(-, (0, s, 0)) - iG_n - 1 - (e^{iG}(-, (0, s, 0)) - iG - 1)\| &\leq \\ &\leq \|G_n(-, (0, s, 0)) - G_n - G(-, (0, s, 0)) + G\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

und

$$\|\partial_j G_n e^{iG_n} - \partial_j G e^{iG}\| \leq \|(\partial_j G_n - \partial_j G) e^{iG_n}\| + \|\partial_j G (e^{iG_n} - e^{iG})\|$$

$\rightarrow 0$, falls außerdem $G_n \rightarrow G$ punktweise fast überall, was man ohne Einschränkung voraussetzen kann).

Da $\partial_j G e^{iG} \in L_2(\mathbb{R}^m)$ ist, geht die rechte Seite in der letzten Ungleichung gegen 0 für $s \rightarrow 0$. Daraus ergibt sich die Richtigkeit des zweiten Terms.

Aus $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^m)$ folgt also $\varphi \in D(T_j')$ und

$$T_j' \varphi = -i \partial_j \varphi + (\partial_j G) \cdot \varphi \quad (j=1, \dots, m).$$

(Der Ausdruck $(\partial_j G) \cdot \varphi$ ist dabei das Produkt der Funktionen $\partial_j G$ und φ ; mit $(\partial_j G)$ werden wir im folgenden auch den Operator der Multiplikation mit der Funktion $\partial_j G$ bezeichnen.)

11.2 Bemerkung. Existiert in Beispiel 11.1 eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^m$, so daß $G(x) = 0$ ist für $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$, so existieren die Richtungswellenoperatoren $W_\tau(T', T)$ für alle $\tau \in S_{m-1}$. Ist nämlich $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$, $\text{supp } f$ kompakt, so gilt für alle $t' \in \mathbb{R}^m$

$$e^{i(t+t')T'} e^{-i(t+t')T_f} = e^{iG(\cdot+t+t')} e^{-iG_f} \rightarrow e^{-iG_f} \quad (|t| \rightarrow \infty).$$

Da die Menge der Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L_2(\mathbb{R}^m)$ ist, gilt also $D(W_\tau(T', T)) = L_2(\mathbb{R}^m)$. Außerdem ist $W_\tau(T', T) = e^{-iG}$ surjektiv, woraus $D(W_\tau(T, T')) = L_2(\mathbb{R}^m)$ folgt.

11.3 Satz.

Sei $m \geq 3$, und seien $G \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^m)$,

$\partial_j G \in L_2(\mathbb{R}^m)$ ($j=1, \dots, m$) in Beispiel 11.1.

Dann sind für die m -Tupel T, T' in Beispiel 11.1 die Voraussetzungen der Sätze 8.7 und 8.10 erfüllt, und es gilt $H_{ac} = H'_{ac} = L_2(\mathbb{R}^m)$.

Beweis. (i) Eine Spektraldarstellung von T erhält man mittels der Fourier-Transformation $F: L_2(\mathbb{R}^m) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^m)$,

$$Ff(z) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{-izx} f(x) dx$$

(Obige Abbildung F , in der das Integral eigentlich nur für gewisse f erklärt ist, ist nach dem Satz von Plancherel unitär; vgl. Yosida [35], VI.2. Wir benutzen die Integral-Schreibweise auch im folgenden freizügig. $F^{-1} = F^*$ ist gegeben durch $F^*g(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{izx} g(z) dz$; im folgenden schreiben wir auch $\hat{f} = Ff$, $\tilde{g} = F^*g$):

Für $t \in \mathbb{R}^m$, $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ gilt

$$\begin{aligned} FU(t)f(z) &= (2\pi)^{-m/2} \int e^{-izx} f(x-t) dx \\ &= e^{-izt} (2\pi)^{-m/2} \int e^{-iz(x-t)} f(x-t) dx \\ &= e^{-itz} Ff(z). \end{aligned}$$

Daher gilt $FU(t)F^* = M_{e^{-it \cdot pr}} \quad (t \cdot pr = \sum t_j \cdot pr_j)$;

$F T_j F^* = M_{pr_j}$ ($j=1, \dots, m$), da $(M_{pr_j}; j=1, \dots, m)$ die unitäre Darstellung $\mathbb{R}^m \ni t \mapsto M_{e^{-it \cdot pr}}$ erzeugt.

Daraus erhält man auch $H_{ac} = L_2(\mathbb{R}^m)$, $E_{ac} = E$.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Borel-Menge, $\chi := \chi_\Omega$. Für $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ gilt dann

$$E(\Omega) f = F^* M_{\chi} F f = \widetilde{\chi} F f = (2\pi)^{-m/2} \widetilde{\chi} * F f = (2\pi)^{-m/2} \widetilde{\chi} * f$$

(vgl. Yosida [35], VI.2, (28));

$$E(\Omega) f(x) = (2\pi)^{-m/2} \int \widetilde{\chi}(x-y) f(y) dy.$$

$$\text{Für } k(x,y) := (2\pi)^{-m/2} \partial_j G(x) \cdot \widetilde{\chi}(x-y) \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} \int |k(x,y)|^2 dx dy &= (2\pi)^{-m/2} \int |\partial_j G(x)|^2 |\widetilde{\chi}(x-y)|^2 dx dy = \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int |\partial_j G(x)|^2 \|\widetilde{\chi}\|^2 dx = (2\pi)^{-m/2} \|\partial_j G\|^2 \lambda^m(\Omega) < \infty. \end{aligned}$$

$$\text{Also ist } (\partial_j G) E(\Omega),$$

$$\begin{aligned} (\partial_j G) E(\Omega) f(x) &= \partial_j G(x) (2\pi)^{-m/2} \int \widetilde{\chi}(x-y) f(y) dy \\ &= \int k(x,y) f(y) dy, \end{aligned}$$

ein Integraloperator mit quadratintegrierbarem Kern,

$$(\partial_j G) E(\Omega) \in c_2 \quad (j=1, \dots, m).$$

(iii) In Beispiel 11.1 gilt bei unseren Voraussetzungen

$$K_j|_{C_0^1(\mathbb{R}^m)} = (\partial_j G)|_{C_0^1(\mathbb{R}^m)} \quad (j=1, \dots, m).$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ wieder eine beschränkte Borel-Menge.

$f \in R(E(\Omega))$ heißt $f = F^* \hat{f}$, mit $\hat{f}|_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega} = 0$;

$$T_j f = F^* M_{\text{pr}_j} F f = F^* M_{\text{pr}_j} \hat{f} = \frac{1}{i} \partial_j (F^* \hat{f}) = \frac{1}{i} \partial_j f.$$

$f, \partial_j f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ sind stetige beschränkte Funktionen, die nach dem Satz von Riemann-Lebesgue gegen 0 gehen für $|x| \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^m), \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad \varphi(x) = 1 \quad \text{für } |x| \leq 1, \\ \varphi(x) = 0 \quad \text{für } |x| \geq 2; \end{aligned}$$

$$\varphi_n \text{ definiert durch } \varphi_n(x) := \varphi\left(\frac{x}{n}\right);$$

$$\text{es gilt } \partial_j \varphi_n(x) = \frac{1}{n} \partial_j \varphi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Dann ist $\varphi_n \cdot f \in C_0^1(\mathbb{R}^m)$, und es gilt

$$\varphi_n \cdot f \rightarrow f \quad (n \rightarrow \infty), \quad \partial_j (\varphi_n f) = \partial_j \varphi_n \cdot f + \varphi_n \cdot \partial_j f \rightarrow \partial_j f \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$(\partial_j G) \varphi_n f = \partial_j G \cdot \varphi_n \cdot f \rightarrow \partial_j G \cdot f \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$T_j'(\varphi_n f) = -i \partial_j(\varphi_n f) + (\partial_j G) \varphi_n f \longrightarrow -i \partial_j f + (\partial_j G) f$$

für $n \longrightarrow \infty$.

Daher ist $f \in D(T_j')$, $T_j' f = -i \partial_j f + (\partial_j G) f$,

$$K_j f = T_j' f - T_j f = (\partial_j G) f.$$

Also gilt $R(E(\Omega)) \subset D(T_j')$ und

$$K_j|_{R(E(\Omega))} = (\partial_j G)|_{R(E(\Omega))} \quad (j=1, \dots, m).$$

Zusammen mit (ii) folgt, daß die Voraussetzungen von Satz 8.7 erfüllt sind.

(iv) Nachweis der noch fehlenden Voraussetzungen " $R(E'_{ac}(\Omega)) \subset D(T_j)$, $K_j E'_{ac}(\Omega) P'_{ac} \in c_p$ " von Satz 8.10.

Wir definieren eine unitäre Abbildung $V: L_2(\mathbb{R}^m) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^m)$ durch $Vf = e^{iG} f$ ($f \in L_2(\mathbb{R}^m)$); es gilt $V^* f = e^{-iG} f$.

Man verifiziert $U'(t) = V^* U(t) V$ ($t \in \mathbb{R}^m$), wofür wir auch $U' = V^* U V$ schreiben.

In (i) bis (iii) wurde gezeigt, daß die Voraussetzungen von Satz 8.7 erfüllt sind, falls $H = L_2(\mathbb{R}^m)$ ist, T die Translationsgruppe U von Beispiel 11.1 erzeugt und T' die Gruppe $U' = V^* U V$ erzeugt, wo V die oben definierte unitäre Abbildung ist und die Funktion G die im Satz genannten Eigenschaften hat.

Definiert man für jeden Operator A in $L_2(\mathbb{R}^m)$ sein Bild $\underline{A}$ durch $\underline{A} := V A V^*$, so erhält man

$$\underline{U}' = V U' V^* = U, \text{ d.h. } \underline{U}' \text{ ist die Translationsgruppe,}$$

$$\underline{U} = V U V^* = V \underline{U}' V^*.$$

Da V^* gegeben ist durch $V^* f = e^{i(-G)} f$ und $-G$ ebenso wie G die im Satz genannten Eigenschaften hat, folgt aus dem oben Gesagten $R(\underline{E}'(\underline{\Omega})) \subset D(\underline{T}_j)$, $(\underline{T}_j - \underline{T}_j') \underline{E}'(\underline{\Omega}) \in c_2$ ($\underline{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ beschränkte Borel-Menge, $j=1, \dots, m$),

und mit der unitären Invarianz dieser Eigenschaften die Behauptung.

11.4 Bemerkungen. a) Es existiert eine Funktion $G \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mit $\partial_1 G, \partial_2 G \in L_2(\mathbb{R}^2)$, so daß in Beispiel 11.1 (mit $m=2$) die Richtungswellenoperatoren W_τ nur auf der $0 \in L_2(\mathbb{R}^2)$ existieren, d.h. daß $D(W_\tau) = \{0\}$ ist für alle $\tau \in S_1$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^1(0, \infty; \mathbb{R})$; für $\alpha > 0$ sei

$$\varphi_\alpha(x) := \varphi(|x|^\alpha) \quad (x \in \mathbb{R}^2).$$

Dann ist $\varphi_\alpha \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\partial_j \varphi_\alpha(x) = \varphi'(|x|^\alpha) \partial_j |x|^\alpha = \alpha \cdot \varphi'(|x|^\alpha) |x|^{\alpha-2} x_j,$$

$$\begin{aligned} \int (\partial_1 \varphi_\alpha(x)^2 + \partial_2 \varphi_\alpha(x)^2) dx &= \alpha^2 \int \varphi'(|x|^\alpha)^2 |x|^{2\alpha-2} dx = \\ &= \alpha^2 \iint \varphi'(r^\alpha)^2 r^{2\alpha-2} r dr d\tau \quad (\text{mit } x = r\tau, dx = r dr d\tau) \\ &= 2\pi \frac{\alpha^2}{\alpha} \int \varphi'(s)^2 s^{2-\frac{1}{\alpha}-1} ds \quad (\text{mit } r = s^{\frac{1}{\alpha}}, dr = \frac{1}{\alpha} s^{\frac{1}{\alpha}-1} ds) \\ &= 2\pi \alpha \int \varphi'(s)^2 s ds. \end{aligned}$$

Sei jetzt $\varphi \geq 0$ so gewählt, daß $\text{supp } \varphi \subset (2, 3)$, $\varphi(\frac{5}{2}) = 1$ ist; dann folgt

$$\text{supp } \varphi_\alpha \subset \{x \in \mathbb{R}^2; 2 < |x|^\alpha < 3\} = \{x \in \mathbb{R}^2; 2^{1/\alpha} < |x| < 3^{1/\alpha}\}.$$

Sei $(\alpha_n) \subset (0, \infty)$ so gewählt, daß $3^{1/\alpha_n} \leq 2^{1/\alpha_{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt (z.B. $\alpha_n = (\frac{\log 2}{\log 3})^n$). Dann gilt $\sum \alpha_n < \infty$,

$$\text{supp } \varphi_{\alpha_n} \cap \text{supp } \varphi_{\alpha_{n'}} = \emptyset \quad \text{für } n \neq n'.$$

Sei $G(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_{\alpha_n}(x)$ ($x \in \mathbb{R}^2$); dann ist $G \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\int (\partial_1 G(x)^2 + \partial_2 G(x)^2) dx = 2\pi \int \varphi'(s)^2 s ds \cdot \sum \alpha_n < \infty.$$

Sei nun $\tau \in S_1$.

Man verifiziert, daß für die Folge (t^n) , $t^n := 2^{1/\alpha_n} \cdot \tau$

gilt

$$e^{it^n T'} e^{-it^n T_f} = e^{iG(. + 2^{1/\alpha_n \tau})} e^{-iG_f} \longrightarrow e^{-iG_f} \quad (n \rightarrow \infty)$$

für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ mit $\text{supp } f$ kompakt, und daher für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$,

während für die Folge (t^n) , $t^n := (\frac{5}{2})^{1/\alpha_n \tau}$ gilt

$$e^{it^n T'} e^{-it^n T_f} = e^{iG(. + (\frac{5}{2})^{1/\alpha_n \tau})} e^{-iG_f} \longrightarrow e^i e^{-iG_f} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Daher kann W_τ nicht existieren.

b) Es stellt sich die Frage, was man dem unter a) gegebenen Beispiel entnehmen soll. Zunächst sieht man jedenfalls, daß die Vermutung 10.5,b für den Fall $p=m=2$ in dieser Form nicht aufrecht erhalten werden kann. Immerhin existieren auch für die unter a) konstruierte Funktion G die Wellenoperatoren $W_{(t^n)}$ für gewisse Folgen (t^n) .

Dem Autor scheint, daß die in a) an einem Beispiel aufgezeigte Nichtexistenz der Richtungswellenoperatoren nicht so sehr typisch für den Fall $m=2$ als vielmehr für die Grenzfälle $p=m \in \mathbb{N}$ ist.

III. Instabilität singulärer Spektren

§ 12 Nichtexistenz von Wellenoperatoren,

Bemerkungen und Beispiele zu § 5

Wir werden darlegen, daß keine Möglichkeit besteht, zu den Ergebnissen von §5 - betreffend Operatoren mit rein singulärem Spektrum - Gegenstücke zu finden, die den Ergebnissen von Teil II der Arbeit entsprechen würden. Weiterhin werden wir uns um eine Motivation bemühen, daß im Fall $m = 1$ die Existenz der Wellenoperatoren $W_{\pm}$ (vgl. Definition 7.6) im allgemeinen nur auf H_{ac} untersucht wird.

12.1 Definition.

Sei H ein Hilbertraum, T ein selbstadjungierter Operator in H . Wie in Hilfssatz 8.2 sieht man, daß die Mengen

$$H_p := \{x \in H; \mu_x \text{ atomar}\}$$

(μ_x "atomar": μ_x wird getragen von einer abzählbaren Menge; solche Maße werden manchmal auch "diskret" genannt),

$$H_{sc} := \{x \in H; \mu_x \text{ ist stetig und } \lambda^1\text{-singulär}\}$$

abgeschlossene Teilräume von H_s sind, die T reduzieren, und daß gilt $H_s = H_p \oplus H_{sc}$ (vgl. Kato [21], X-§1.1, §1.2).

H_p heißt unstetiger Teilraum (von H bezüglich T);

H_p ist der von den Eigenelementen von T erzeugte abgeschlossene Teilraum.

H_{sc} heißt singulär stetiger Teilraum (von H bezüglich T) ("sc" = singular continuous).

12.2 Bemerkung. Sei H ein Hilbertraum, T, T' selbstadjungierte Operatoren in H , $x \in H_p \cap D(W_+)$

(mit $W_+ := W_+(T', T)$, vgl. Definition 7.6).

Dann gilt $H_x = H'_x$ (wir bezeichnen wieder $H_x = H_{x,T}$,

$H'_x = H_{x,T'}$), $D(T) \cap H_x = D(T') \cap H'_x$,

$T'y = Ty$ für alle $y \in D(T) \cap H_x$,

$W_+y = y$ für alle $y \in H_x$.

Beweis. μ_x ist atomar; nach Satz 2.13 wird H_x von Eigenelementen x_α ($\alpha \in A$) von T aufgespannt, $H_x = \overline{\mathbb{L}\{x_\alpha; \alpha \in A\}}$.

Mit Satz 7.7,b folgt andererseits $H_x \subset D(W_+)$; nach

Folgerung 7.9 gilt also $T'x_\alpha = Tx_\alpha$ ($\alpha \in A$).

Daraus folgen alle Behauptungen.

Aus dieser Bemerkung folgt, daß es im allgemeinen nicht sinnvoll ist, Wellenoperatoren für $x \in H_p$ zu betrachten. Diese Bemerkung trifft ebenso wie auf W_+ auf beliebige andere Wellenoperatoren $W_{(t')}$ zu.

12.3 Bemerkungen. a) Die folgende Betrachtung, die dem Autor von J.Weidmann mitgeteilt wurde, soll plausibel machen, daß man in der Quantenmechanik die Wellenoperatoren im allgemeinen nur auf H_{ac} betrachtet.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $H = L_2(\mathbb{R}^n)$, T ein selbstadjungierter Operator in H , $D_T := (D(T), \|\cdot\|_T := (\|\cdot\|^2 + \|T\cdot\|^2)^{1/2})$

(d.h. $D(T)$ ausgestattet mit der Graphennorm; D_T ist ein Hilbertraum, Skalarprodukt ist klar).

Für beschränkte offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei die Abbildung

$D_T \ni f \mapsto \chi_\Omega f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ kompakt.

(Bei diesen Voraussetzungen denken wir an folgende

Situation: $T = -\Delta + \text{Störung}$, mit einer Störung, für die T mit dem Definitionsbereich $D(T) = W_2^2(\mathbb{R}^n)$ selbstadjungiert ist; W_2^2 ist der Sobolev-Raum der Funktionen, die quadratintegrierbare verallgemeinerte Ableitungen bis zur 2. Ordnung besitzen. Der Auswahlssatz von Rellich liefert dann die Kompaktheit der Abbildung

$$W_2^2(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \chi_{\Omega} f \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Die physikalische Interpretation liefert, daß die Betrachtung der Wellenoperatoren nur für "ungebundene Zustände" sinnvoll ist, d.h. für solche $f \in H$, für die für alle beschränkten offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_{\Omega} |e^{-itT} f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (|t| \rightarrow \infty).$$

Wir werden zeigen, daß dies unter den obigen Voraussetzungen gilt, falls $f \in H_{ac}$ ist:

Sei zunächst $f \in H_{ac} \cap D(T)$. Aus $f, Tf \in H_{ac}$ folgt $e^{-itT} f \rightarrow 0$, $e^{-itT} Tf \rightarrow 0$ ($|t| \rightarrow \infty$); vgl. dazu den Schritt am Ende des Beweises von Satz 8.5, a.

Für alle $g \in D_T$ gilt

$$\langle g | e^{-itT} f \rangle_T = \langle g | e^{-itT} f \rangle + \langle Tg | e^{-itT} Tf \rangle \rightarrow 0 \quad (|t| \rightarrow \infty),$$

d.h. $e^{-itT} f \rightarrow 0$ in D_T ($|t| \rightarrow \infty$).

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so folgt nach Voraussetzung $\chi_{\Omega} e^{-itT} f \rightarrow 0$,

$$\int_{\Omega} |e^{-itT} f(x)|^2 dx = \|\chi_{\Omega} e^{-itT} f\|^2 \rightarrow 0 \quad (|t| \rightarrow \infty).$$

Da $H_{ac} \cap D(T)$ dicht in H_{ac} ist und die Operatoren $f \mapsto \chi_{\Omega} e^{-itT} f$ in t gleichmäßig beschränkt sind (durch 1), folgt die Behauptung für alle $f \in H_{ac}$.

b) In dem Beweis in a) wird die Voraussetzung " $f \in H_{ac}$ "

nur benutzt, um zu zeigen $e^{-itT}f, e^{-itT}Tf \rightarrow 0$ ($|t| \rightarrow \infty$).
Hilfssatz 12.4 und Bemerkung 12.5 werden zeigen, daß für $f \in H_S$ im allgemeinen keine solche Aussage gemacht werden kann.

12.4 Hilfssatz.

Sei H ein Hilbertraum, T ein selbstadjungierter Operator in H , $x \in H$.

a) Gilt $\langle x | e^{-itT}x \rangle \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), so folgt

$$e^{-itT}y \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } y \in H_x.$$

b) Gilt $\langle x | e^{-itT}x \rangle \not\rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), so gibt es den Operator T reduzierende Teilräume $H_1, H_2 \subset H_x$, $H_1 \neq \{0\}$,

$$H_x = H_1 \oplus H_2, \quad \text{so daß}$$

$$e^{-itT}y \not\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } y \in H_1, y \neq 0,$$

$$e^{-itT}z \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } z \in H_2.$$

Beweis. a) Für $t', t'' \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle e^{-it'T}x | e^{-itT}e^{-it''T}x \rangle = \langle x | e^{-i(t+t''-t')T}x \rangle \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty);$$

daraus folgt $\langle x_1 | e^{-itT}x_2 \rangle \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) für alle

$$x_1, x_2 \in \overline{L\{e^{-itT}x; t \in \mathbb{R}\}} = H_x \quad (\text{zur letzten Gleichheit vgl. Bemerkung 7.2,d}).$$

b) $H_2 := \{z \in H_x; e^{-itT}z \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)\}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von H_x , der invariant unter e^{-itT} ($t \in \mathbb{R}$), also nach Bemerkung 7.2,c ein reduzierender Teilraum von T ist. $H_1 := H_x \ominus H_2$ reduziert daher auch T , und für $y \in H_1, y \neq 0$ muß gelten $e^{-itT}y \not\rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), da sonst $y \in H_2$ wäre. Wegen $x \notin H_2$ ist $H_1 \neq \{0\}$.

12.5 Bemerkung. Ist μ ein endliches Borel-Maß auf $\mathbb{R}$, $H = L_2(\mathbb{R}, \mu)$, $T = M_{\text{id}}$, so zeigt sich schon an der Fourier-Transformierten $\hat{\mu}$ von μ , $\hat{\mu}(t) = \int e^{-it\lambda} d\mu(\lambda)$, ob gilt $e^{-itT} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) oder nicht. Mit f , $f(\lambda) = 1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), ist nämlich $H_f = H$, $\langle f | e^{-itT} f \rangle = \int e^{-it\lambda} d\mu(\lambda) = \hat{\mu}(t)$, und die Behauptung ergibt sich aus Hilfssatz 12.4.

In Zygmund [36], XII.11 (vgl. insbesondere (11.16); auch V, (3.6) und XII, (10.11)) findet man Beispiele singulärer Borel-Maße auf $[0, 1]$, von denen manche $\hat{\mu}(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) erfüllen, andere nicht.

12.6 Satz (mit J. Weidmann).

Sei H ein Hilbertraum, T ein selbstadjungierter Operator in H , $y \in H$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$K := c \langle y | \cdot \rangle y, \quad T' := T + K.$$

Dann gilt $D(W_{\pm}) = (H_y)_{\perp}^{\perp}$ ($(H_y)_s = (H_{y,T})_{s,T}$ bezeichnet dabei den singulären Teilraum von $H_{y,T}$ bezüglich $T_{H_{y,T}}$; es gilt $(H_y)_s = H_y \cap H_s$).

Unter der zusätzlichen Voraussetzung $H_y = H$ gilt $D(W_{\pm}) = H_{ac}$, d.h. die Wellenoperatoren existieren genau auf dem absolut stetigen Teilraum von H bezüglich T .

12.7 Satz (Aronszajn [1], Donoghue [10], Theorem 2).

Unter den Voraussetzungen von Satz 12.6 gilt:

- $\mu_{y,ac}$ und $\mu'_{y,ac}$ sind äquivalent;
- $\mu_{y,s} \perp \mu'_{y,s}$.

(Die Indizes "ac" bzw. "s" bezeichnen hier den bezüglich λ^1 gebildeten absolut stetigen bzw. singulären Teil der

Maße $\mu_y = (\mu_{y,T}, \mu'_y = (\mu_{y,T'}, \cdot))$

Zum Beweis siehe Donoghue, loc. cit.

Beweis von Satz 12.6. Für $x \in H_y^\perp$ gilt $Kx = c\langle y|x \rangle y = 0$.
Daraus folgert man $H_y = H'_y$, $(T)_{H_y^\perp} = (T')_{H_y^\perp}$,
 $H_y^\perp \subset D(W_+)$. Wir können deshalb im folgenden ohne Einschränkungen voraussetzen $H = H_y$.

Nach Satz 10.1 (Satz von Kato - Rosenblum) gilt

$$H_{ac} \subset D(W_+).$$

Sei $x \in D(W_+) \ominus H_{ac}$, $x' := W_+ x$.

Aus Satz 7.7, b folgt $\mu_x = \mu'_x$; man beachte dabei Bemerkung 7.8. Aus Hilfssatz 2.14 zusammen mit der Eindeutigkeit von μ_x in Satz 2.13 folgt $\mu_x \ll \mu_y$, wegen $x \in H_s$ sogar $\mu_x \ll \mu_{y,s}$. Ebenso folgt $\mu'_x \ll \mu'_{y,s}$.

Nach Satz 12.7, b gilt $\mu_{y,s} \perp \mu'_{y,s}$, daher $\mu_x \perp \mu'_x$.

Dies zusammen mit $\mu_x = \mu'_x$ ergibt $\mu_x = \mu'_x = 0$, $x = 0$.

Also gilt $D(W_+) = H_{ac}$.

Ebenso ergibt sich der Beweis für W_- .

12.8 Bemerkungen. a) Satz 12.6 läßt es vernünftig erscheinen, daß man zur Untersuchung der Existenz der Wellenoperatoren $W_\pm$ nicht nur den nach Bemerkung 12.2 dafür nicht sinnvollen unstetigen Teilraum H_p ausblendet, sondern den ganzen singulären Teilraum H_s ; vgl. dazu z.B. Kato [21], X-§3.2.

b) Die Nichtexistenz der Wellenoperatoren auf dem singulären Teilraum für die "kleinstmögliche" nichttriviale, die eindimensionale Störung läßt denselben Sachverhalt auch für größere Störungen vermuten. Ein solches Resultat ist dem Autor jedoch nicht bekannt. Andererseits konnten wir auch

kein nichttriviales Beispiel finden, für das ein Wellenoperator auf dem singulär stetigen Teilraum existiert.

c) Satz 12.6 macht es zunächst unwahrscheinlich, daß Stabilitätssätze für singuläre Spektren - d.h. Gegenstücke zu den Resultaten von §5 - mit der Methode der Wellenoperatoren bewiesen werden können. Daß darüberhinaus solche Stabilitätssätze tatsächlich nicht gelten, wird klar aus Beispiel 12.9 und Bemerkung 12.10,a.

12.9 Beispiel (Aronszajn [1], Donoghue [10], Example 3).

Sei $\Gamma_0 \subset [0,1]$ das Cantor'sche Diskontinuum, μ_0 das in Bemerkung 6.5,b erklärte Maß auf Γ_0 , $H = L_2(\Gamma_0, \mu_0)$, $T = M_{id}$, $K_c := c\langle 1 \rangle$ für $c \in \mathbb{R}$.

Dann ist $T'_c := T + K_c$ diagonal für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zum Beweis siehe Donoghue, loc. cit.

12.10 Bemerkungen. a) Das Maß μ_0 in Beispiel 12.9 ist die Einschränkung von H_{p_0} (vgl. Bezeichnung 5.1) auf die Borel-Mengen von Γ_0 , mit $p_0 = \frac{\log 2}{\log 3}$; es entspricht also dem Lebesgue-Maß λ^1 auf $[0,1]$, das man als Einschränkung von H_1 auf die Borel-Mengen von $[0,1]$ erhält (vgl. Bemerkung 5.1,e). Eine dem Satz 10.1 (Satz von Kato-Rosenblum) entsprechende Aussage müßte daher implizieren, daß in Beispiel 12.9 für selbstadjungierte Operatoren $K \in c_p$ mit $p \leq p_0$ der Operator $T+K$ einen dem Operator T unitär äquivalenten Teil besitzt. Beispiel 12.9 zeigt, daß eine solche Aussage nicht gilt; denn der eindimensionale Operator K_c liegt in c_p für alle $p > 0$.

b) Satz 5.2 würde in der Situation von Beispiel 12.9 nur liefern, daß es für jedes $p > p_0$ einen selbstadjungierten Operator $K \in c_p$ gibt, so daß $T+K$ diagonal ist. Nachdem soeben klar geworden ist, daß eine Stabilitäts-

aussage für singuläre Spektren, die den Aussagen von Teil II der Arbeit entsprechen würde, nicht möglich ist, kann man sich fragen, ob die Aussage von Satz 5.2 nicht trotzdem optimal ist. Das heißt, daß man Beispiele finden müßte, die die Voraussetzungen von Satz 5.2 erfüllen und für die die Behauptung von Satz 5.2 nicht verbessert werden kann. Solche Beispiele sind dem Autor nicht bekannt.

Literaturverzeichnis

- [1] Aronszajn, N.: On a problem of Weyl in the theory of singular Sturm-Liouville equations.
Amer. J. Math. 79, 597 - 610 (1957).
- [2] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1968.
- [3] Berberian, S.K.: The Weyl spectrum of an operator.
Indiana Univ. Math. J. 20, 529 - 544 (1970).
- [4] Berg, I.D.: An extension of the Weyl - von Neumann theorem to normal operators.
Trans. Amer. Math. Soc. 160, 365 - 371 (1971).
- [5] Berg, I.D.: Approximation of normal operators by diagonal operators and geometry of the spectrum.
Preliminary report 1973.
- [6] Birman, M.S.: A local criterion for the existence of wave operators. Math. USSR - Izvestija 2, 879 - 906 (1968) (Übersetzung von: Izv. Akad Nauk SSSR, Ser. Mat Tom 32 (1968)).
- [7] Bourbaki, N.: Topologie générale, Chap. 10. Espaces fonctionnels, 2ème éd. Paris: Hermann 1967.
- [8] Bourbaki, N.: Théories spectrales. Paris: Hermann 1967.
- [9] Carey, R.W. - J.D. Pincus: Perturbation by trace class operators. Bull. Amer. Math. Soc. 80, 758 - 759 (1974).
- [10] Donoghue, Jr., W.F.: On the perturbation of spectra.
Comm. Pure Appl. Math. 18, 559 - 579 (1965).
- [11] Dunford, N. - J.T. Schwartz: Linear operators II.
New York - London - Sydney: Interscience Publishers 1963.
- [12] Dunford, N. - J.T. Schwartz: Linear operators III.
New York - London - Sydney - Toronto:
Wiley - Interscience 1971.

- [13] Franz, W.: Topologie I. Sammlung Götschen, Berlin - New York: Walter de Gruyter 1973.
- [14] Friedrichs, K.O.: Über die Spektralzerlegung eines Integraloperators. Math. Ann. 115, 249 - 272 (1938).
- [15] Halmos, P.R.: What does the spectral theorem say? Amer. Math. Monthly 70, 241 - 247 (1963).
- [16] Halmos, P.R.: Ten problems in Hilbert space. Bull. Amer. Math. Soc. 76, 887 - 933 (1970).
- [17] Halmos, P.R.: Continuous functions of Hermitian operators. Proc. Amer. Math. Soc. 31, 130 - 132 (1972).
- [18] Hausdorff, F.: Dimension und äußeres Maß. Math. Ann. 79, 157 - 179 (1919).
- [19] Jörgens, K.: Lineare Operatoren in Hilberträumen. Kurzschrift, Math. Inst. Univ. München 1971/72.
- [20] Kato, T.: Perturbation of continuous spectra by trace class operators. Proc. Japan Acad. 33, 260 - 264 (1957).
- [21] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1966.
- [22] Kuroda, S.T.: On a theorem of Weyl - von Neumann. Proc. Japan Acad. 34, 11 - 15 (1958).
- [23] Lax, P.D. - R.S. Phillips: Scattering theory. New York - London: Academic Press 1967.
- [24] McCarthy, Ch.A.: c_p . Israel J. Math. 5, 249 - 271 (1967).
- [25] Neumann, J. von: Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators. Actualités Sci. Ind. 229, 1 - 20 (1935).
- [26] Putnam, C.R.: On normal operators in Hilbert space. Amer. J. Math. 73, 357 - 362 (1951).
- [27] Reed, M. - B. Simon: Methods of modern mathematical physics I, functional analysis. New York - London: Academic Press 1972.

- [28] Riesz, F. - B.Sz.-Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis, 2.Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1968.
- [29] Rosenblum, M.: Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence. Pac. J. Math. 7, Pac. J. Math. 7, 997 - 1010 (1957).
- [30] Sikonia, W.: The von Neumann converse of Weyl's theorem. University of Colorado, Department of Math. 1971.
- [31] Sikonia, W.: The von Neumann converse of Weyl's theorem (Kurzfassung von [30]). Indiana Univ. Math. J. 21, 121 - 124 (1971).
- [32] Sz.-Nagy, B.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Ergebnisse der Mathematik Band 39. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1967.
- [33] Weidmann, J.: Das Weyl - von Neumann'sche Theorem für normale Operatoren. unveröffentlicht.
- [34] Weyl, H.: Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist. Rend. Circ. Mat. Palermo 27, 373 - 392 (1909).
- [35] Yosida, K.: Functional analysis, 2nd ed. New York: Springer 1968.
- [36] Zygmund, A.: Trigonometric series. Cambridge: At the University Press 1968.

Lebenslauf

Geboren am 13. 11. 1943 in Großenhain/Sachsen

Schulbildung:

1950 - 1954 Grundschule in Großenhain/Sa

1954 - 1959 Internatsschule des Dresdner Kreuzchores in
Dresden

1959 - 1964 Eberhard - Ludwigs - Gymnasium in Stuttgart

Studium:

1964 - 1966 Technische Hochschule Stuttgart

2. 5. 1966 Diplomvorprüfung in Mathematik

1966 - 1967 Universität Tübingen

1967 - 1968 Université de Paris

1968 - 1970 Universität München

23. 6. 1970 Diplom - Hauptprüfung in Mathematik

Diplomarbeit bei Prof.Dr.E.Wienholtz: "Das Cauchysche
Anfangswertproblem für symmetrische hyperbolische Systeme"

1970 - 1971 New York University, Courant Institute of
Mathematical Sciences

Seit dem 16. 9. 1971 bin ich Verwalter der Dienstgeschäfte
eines wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen
Institut der Universität München.

München, im Dezember 1974

